Universitat Oberta de Catalunya (UOC)

Señales analógicas y digitales

Introducción a las señales de variable continua (analógicas) y de variable discreta (digitales)

Germán Cobo Rodríguez
15/09/2020

Índice

Introducción

¿Qué es una señal? ¿Cuáles son su utilidad e interés en los ámbitos de trabajo y conocimiento de las ingenierías? La teoría de señales y sistemas resulta ser de gran importancia en estos ámbitos, pues proporciona herramientas conceptuales y matemáticas que permiten plantear y resolver problemas pertenecientes a la práctica totalidad de áreas de las ingenierías: electrónica, procesamiento de datos, sistemas de comunicación, etc. Gran cantidad de problemas y situaciones pueden ser abordados, pensados, modelizados y resueltos de forma satisfactoria gracias a la teoría de señales y sistemas.

En el presente módulo, se establecen los marcos conceptual, matemático y práctico que permiten poner las bases sobre las que se desarrolla toda la teoría de señales y sistemas. Para empezar, en la primera sección se da la definición básica de señal y se especifica la notación que nos permite trabajar con este concepto en términos matemáticos. Asimismo, se determinan las clases de señales de las que se ocupa la teoría que se desarrolla tanto en este módulo como en los posteriores.

A continuación, el resto de secciones del módulo están dedicadas a introducir las herramientas básicas necesarias a la hora de trabajar con señales: las operaciones básicas de cálculo entre señales, las transformaciones más importantes que puede sufrir una señal, las diferentes tipologías de señales que pueden establecerse atendiendo a distintos criterios de clasificación, los principales parámetros que se usan para caracterizar una señal, cuáles son las señales más comúnmente usadas en la práctica, etc. Además, al final del módulo, hay una última sección dedicada a comentar la relación existente entre el concepto de señal y el concepto de vector, clave para poder llegar a entender en profundidad la teoría de señales y sistemas.

A lo largo de estas secciones y apartados, los diferentes desarrollos teóricos van acompañados de ejercicios a modo de ejemplo, que vienen a ilustrar la teoría previamente presentada y que también permiten hacer inventario de las diferentes herramientas matemáticas de uso más común al trabajar con señales: representación de funciones, cálculos de derivadas, de integrales, de series numéricas, etc. A este respecto, los ejercicios son resueltos tanto de forma analítica, como mediante el uso de la herramienta MATLAB, un *software* de gran potencia y utilidad en el ámbito de la teoría de señales y sistemas. Para ver el detalle del uso de MATLAB en la resolución de los ejercicios, se recomienda consultar el Anexo de este módulo.

Finalmente, se incluye una sección a modo de resumen en la que se repasan los conceptos más importantes que se han desarrollado a lo largo del módulo y, además, todo un conjunto de ejercicios de autoevaluación, con sus respectivas soluciones, pensados para trabajar precisamente dichos conceptos.

Objetivos

Los principales objetivos de este módulo son los siguientes:

1. Saber qué es una señal, en el marco de la teoría de señales y sistemas, y conocer cuáles son los ámbitos de aplicación del concepto de señal.

2. Conocer cuál es relación y qué diferencias hay entre las señales analógicas y digitales.

3. Conocer la notación matemática propia de la teoría de señales y sistemas.

4. Saber representar gráficamente señales y operar matemáticamente con ellas, tanto de forma analítica, como mediante el uso de la herramienta *software* MATLAB.

5. Conocer los principales parámetros que permiten caracterizar una señal.

6. Conocer las principales transformaciones a las que puede ser sometida una señal y saber cuáles son sus efectos.

7. Conocer los principales criterios de clasificación que dan lugar a las diferentes tipologías de señales.

8. Conocer las señales más típicamente usadas en la práctica y saber cómo trabajar con ellas.

9. Conocer la relación existente entre en concepto de señal y el de vector, y ser consciente de su importancia y utilidad.

1. Introducción a las señales analógicas y digitales

En esta primera sección se introduce, en primer lugar, la noción básica de señal (apartado 1.1) y, a continuación, se establecen el marco conceptual y el método de notación matemática (apartados 1.2 y 1.3) necesarios para construir la teoría de señales y sistemas que se empieza a elaborar en las secciones restantes del módulo y se sigue desarrollando en los módulos posteriores.

1.1. ¿Qué es una señal?

Informalmente, **cualquier representación que contenga información acerca de la naturaleza o el comportamiento de algún fenómeno puede ser considerada una señal**. En general, las señales se modelizan algebraicamente mediante funciones numéricas. Por tanto, más formalmente, **una señal es una función de una o más variables independientes**.

La noción de señal es fundamental y resulta de mucha utilidad en una amplia variedad de disciplinas y campos de conocimiento, y muy especialmente en las ingenierías:

- **Electrónica**: la variación a lo largo del tiempo de la diferencia de potencial medida entre dos puntos de un circuito (aquí, la variable independiente sería el tiempo).
- **Audio**: la variación a lo largo del tiempo de la corriente eléctrica proporcionada por un micrófono (variable independiente: el tiempo).
- **Imagen**: las componentes RGB de cada uno de los píxeles de una imagen digital (variables independientes: las coordenadas espaciales de los píxeles).
- **Vídeo**: los valores de luminancia de los píxeles de cada fotograma de una secuencia de vídeo de una cierta duración (variables independientes: las coordenadas espaciales de los píxeles y el índice de los fotogramas).
- **Comunicaciones**: el ruido introducido por el canal en un sistema radio (variable independiente: el tiempo).
- **Antenas**: el diagrama de radiación de una antena (variables independientes: las dimensiones del espacio).
- **Economía**: la fluctuación del valor bursátil de una compañía a lo largo del tiempo (variable independiente: el tiempo).
- **Meteorología**: los valores de temperatura, humedad y presión atmosférica tomados durante un cierto período de tiempo en diferentes puntos de una cierta región (variables independientes: el tiempo y las dimensiones del espacio).

- **Docencia**: la distribución de notas de los estudiantes de una asignatura durante todo un semestre (variable independiente: el índice de las pruebas de evaluación).

Únicamente con estos pocos ejemplos ya se observa que, independientemente de los fenómenos a los cuales estén asociados las señales (es decir, independientemente de cuál sea el origen de las señales), estas poseen ciertas características generales que conviene considerar. Las señales pueden ser deterministas o aleatorias, periódicas o aperiódicas, continuas o discretas, unidimensionales o multidimensionales, tener duración finita o infinita, etc. En los siguientes apartados de esta sección, así como en el resto de secciones de este módulo, se da cuenta de toda esta diversidad de características de las señales.

1.2. Señales unidimensionales

En este apartado, se especifica el tipo de señales al que se va a limitar nuestro estudio, y se detalla la notación matemática que permite denotarlas y modelizarlas en términos algebraicos.

En primer lugar, nuestra teoría de señales y sistemas se limita, sin que ello implique una pérdida de generalidad, al estudio de **señales unidimensionales**, es decir, señales que son **funciones de una única variable independiente**.

En segundo lugar, dependiendo de la naturaleza de la variable independiente, cabe distinguir entre dos grandes tipos de señales unidimensionales: **señales analógicas** y **señales digitales**.

Una **señal analógica** (o señal continua) es aquella señal cuya **variable independiente es una variable continua**.

Una **señal digital** (o señal discreta) es aquella señal cuya **variable independiente es una variable discreta**.

En tercer lugar, es habitual que la variable independiente se identifique, aunque no siempre, con algún tipo de magnitud física: tiempo, distancia, altura, frecuencia, etc. De nuevo sin que ello implique una pérdida de generalidad, en nuestra teoría de señales y sistemas se trabaja con **señales temporales**, es decir, con señales que representan información que varía a lo largo del tiempo. Como consecuencia de esto, **la variable independiente, ya sea continua o discreta, será identificada con el tiempo, con la frecuencia, o con ninguna magnitud física**.

Y en cuarto lugar, se considera que **tanto la variable independiente como la información representada por una señal son magnitudes numéricas**. Por ejemplo, considérese una señal que represente la variación de la temperatura de trabajo de un microprocesador (medida en grados centígrados) a lo largo del tiempo (medido en segundos).

Teniendo en cuenta todas estas consideraciones y sin pérdida de generalidad, a continuación se establece **la notación matemática utilizada para representar señales**:

Las **señales** son denotadas mediante el uso de letras (que, cuando resulte conveniente, pueden ser indexadas mediante subíndices): x, y, X, Y, x_1, X_2, x_N, Y_1, y_2, Y_N, etc.

La **variable independiente** es denotada mediante una letra. A saber y de modo no exhaustivo:

1. t: tiempo continuo ($t \in \mathbb{R}$), medible en segundos (seg).
2. n: tiempo discreto ($n \in \mathbb{Z}$), medible en muestras.
3. f o Ω: frecuencia analógica ($f, \Omega \in \mathbb{R}$), medible en hercios (Hz) o radianes por segundo (rad/seg), respectivamente.
4. ω o k: frecuencia digital ($\omega \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$), medible en radianes (rad) o muestras, respectivamente.
5. s: variable del espacio transformado de las señales analógicas ($s \in \mathbb{C}$).
6. z: variable del espacio transformado de las señales digitales ($z \in \mathbb{C}$).

En general, **las variables continuas son reales** ($\mathbb{R}$: conjunto de los números reales) **o complejas** ($\mathbb{C}$: conjunto de los números complejos), mientras que **las variables discretas son enteras** ($\mathbb{Z}$: conjunto de los números enteros).

Una **señal analógica** es una **función de una variable continua** denotada como $x(t)$, donde x es el nombre de la señal y la variable independiente (en este caso, t) va entre paréntesis.

Una **señal digital** es una **función de una variable discreta** denotada como $x[n]$, donde x es el nombre de la señal y la variable independiente (en este caso, n) va entre corchetes.

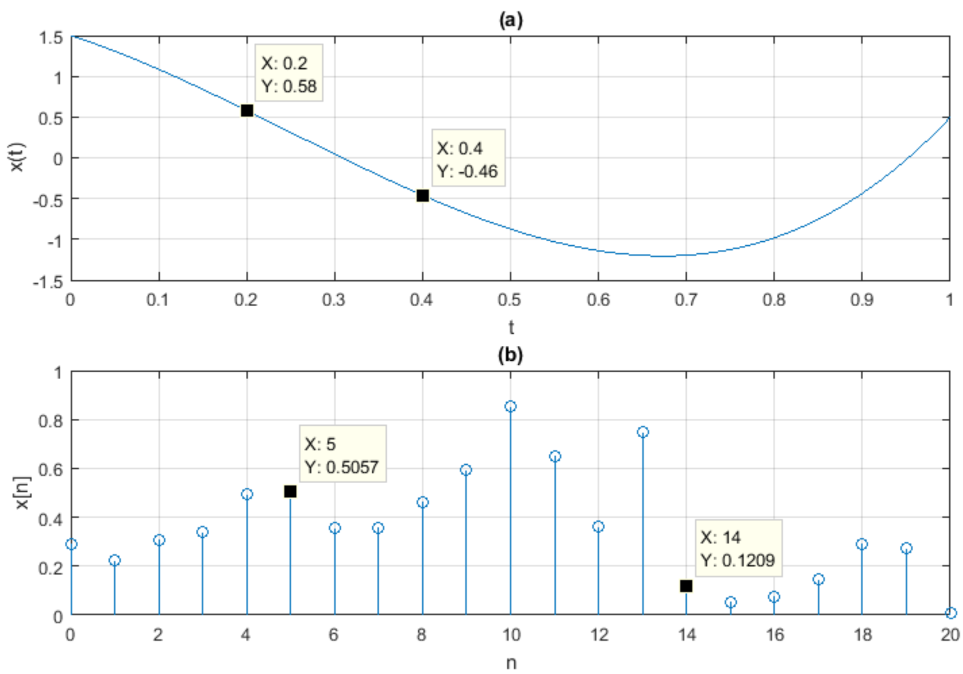

Figura 1. Representación gráfica de dos señales reales. (a) Señal analógica en $0 \leq t \leq 1$. (b) Señal digital en $0 \leq n \leq 20$. En las etiquetas, las letras X e Y denotan, respectivamente, los ejes horizontal y vertical de la gráfica.

En la Figura 1, se muestran dos ejemplos de **representación gráfica de señales**. Ambas gráficas han sido generadas mediante la herramienta de *software* matemático **MATLAB**[1]. En general, las representaciones gráficas de señales en este módulo, así como en los módulos posteriores, están generadas mediante esta herramienta *software*.

Es importante notar que, en general, **la representación gráfica de una señal nunca podrá abarcar la señal entera, sino solo un intervalo finito de la misma**, puesto que el recorrido de valores que puede adoptar la variable independiente siempre es infinito, ya sea esta entera, real o compleja. Conviene tener esto siempre presente al generar y leer gráficas de señales.

Así, se observa que, **ya sea analógica o digital, una señal no es más que una secuencia de valores numéricos a lo largo de una variable independiente**. Por tanto, para acceder a un valor numérico determinado de la señal (esto es, a un elemento concreto de la secuencia), no hay más que indexar la variable independiente y especificar un valor de la misma. En el caso de una señal analógica de variable real:

$$x(t_i) = x(t = t_i) \tag{1}$$

para cualquier valor real de la variable independiente ($\forall t_i \in \mathbb{R}$)[2]. Y, en el caso de una señal digital (es decir, de variable entera):

$$x[n_i] = x[n = n_i] \tag{2}$$

para cualquier valor entero de la variable independiente ($\forall n_i \in \mathbb{Z}$).

A estos valores numéricos se les denomina **valores de amplitud de la señal**. Por tanto:

- Tomando, por ejemplo, los instantes $t_1 = 0.2$ y $t_2 = 0.4$ de la señal analógica ilustrada en la Figura 1(a), se obtienen los valores de amplitud $x(t_1) = x(0.2) = 0.58$ y $x(t_2) = x(0.4) = -0.46$.
- Tomando, por ejemplo, las muestras $n_1 = 5$ y $n_2 = 14$ de la señal digital ilustrada en la Figura 1(b), se obtienen los valores de amplitud $x[n_1] = x[5] = 0.5056$ y $x[n_2] = x[14] = 0.1209$.

Asimismo, conviene notar que **la secuencia de valores de amplitud de una señal digital se puede explicitar numéricamente**:

$$x[n] = [\cdots\ x[-3]\ x[-2]\ x[-1]\ x[0]\ x[1]\ x[2]\ x[3]\ \cdots] \tag{3}$$

Por ejemplo, el intervalo $5 \leq n \leq 10$ de la señal digital de la Figura 1(b) es el siguiente: $[0.5057\ 0.3562\ 0.3583\ 0.4638\ 0.5918\ 0.8558]$. Sin embargo, **no es posible explicitar numéricamente la secuencia de valores de amplitud de una señal analógica**, ya que cualquier intervalo finito definido sobre una variable continua comprende un número infinito de valores.

Se observa, también, que las dos señales de la Figura 1 son reales (todos sus valores de amplitud lo son). En general, trabajaremos tanto con **señales reales** ($x(s_i) \in \mathbb{R}, \forall s_i \in \mathbb{C}$;

[1] Más información en http://es.mathworks.com/products/matlab/

[2] La ecuación (1) se puede generalizar fácilmente al caso de una señal analógica de variable compleja haciendo $x(s_i) = x(s = s_i), \forall s_i \in \mathbb{C}$.

$x(t_i) \in \mathbb{R}, \forall t_i \in \mathbb{R}$; $x[n_i] \in \mathbb{R}, \forall n_i \in \mathbb{Z}$) como con **señales complejas** ($X(s_i) \in \mathbb{C}, \forall s_i \in \mathbb{C}$; $X(t_i) \in \mathbb{C}, \forall t_i \in \mathbb{R}$; $X[n_i] \in \mathbb{C}, \forall n_i \in \mathbb{Z}$). Para más detalles sobre esta distinción, consultar el apartado 5.1 de este mismo módulo.

Finalmente, es importante no olvidar que limitarnos al estudio de señales temporales (o sea, unidimensionales) no da como resultado una notación, unas representaciones y, en general, toda una teoría de señales y sistemas que ya no sirvan si se da el caso que haya que trabajar con señales multidimensionales. Estos casos requieren, por supuesto, de extender esta notación y de ampliar la teoría, pero no de rechazarlas por tener que construir unas nuevas desde cero. Lo que se estudia aquí es la teoría básica de señales y sistemas, que se limita a las señales unidimensionales y que se puede generalizar y extender a casos más complejos.

1.3. Relación entre señales analógicas y señales digitales

En este apartado se introduce la cuestión de **cómo están relacionadas entre sí las señales analógicas y las digitales**. Aunque este es un asunto de gran interés y complejidad, aquí vamos a plantearlo de forma muy breve, intuitiva y simplificada, puesto que, por el momento, en este punto inicial del estudio de la teoría de señales y sistemas no se requiere de mayores explicaciones. Un estudio más completo y detallado de esta cuestión (que es de gran importancia) se proporciona más adelante, en módulos posteriores.

En general, se puede plantear sin mayores problemas que **una señal digital puede ser entendida como el resultado del muestreo de una señal analógica**. Esto, expresado en términos matemáticos a partir de la notación establecida en el apartado 1.2, no quiere decir más que lo siguiente:

$$x[n] = x(t = n \cdot T_m) \quad (4)$$

allí donde T_m se denomina **periodo de muestreo** y se expresa en seg.

Es decir, los valores de amplitud de una señal digital $x[n]$, comúnmente denominados **muestras**, pueden ser entendidos como los valores de amplitud de una señal analógica $x(t)$ en determinados instantes de tiempo: ...$x[-2] = x(-2T_m)$, $x[-1] = x(-T_m)$, $x[0] = x(0)$, $x[1] = x(T_m)$, $x[2] = x(2T_m)$... $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Así, lo que dice la ecuación (4) es lo siguiente:

- Los valores de amplitud de una señal analógica $x(t)$ tomados periódicamente cada T_m segundos dan lugar a una señal digital $x[n]$.
- Una señal digital $x[n]$ puede ser expresada como la sucesión de muestras tomadas periódicamente cada T_m segundos de una señal analógica $x(t)$.

Es importante notar que **esto no quiere decir que, verdadera y necesariamente, toda señal digital sea el resultado del muestreo de una señal analógica, sino que puede ser entendida perfectamente como tal, al margen de que realmente lo sea o no**.

Este planteamiento da lugar a dos hechos interesantes, los cuales son ilustrados en la Figura 2:

1. Partiendo de una misma señal analógica $x(t)$, es posible obtener diferentes señales digitales variando el valor de T_m. En la Figura 2(a-d), la señal analógica $x(t)$ es muestreada a diferentes valores de T_m, dando lugar a tres señales digitales diferentes: $x_1[n]$ ($T_m = 0.2\ seg$), $x_2[n]$ ($T_m = 0.1\ seg$) y $x_3[n]$ ($T_m = 0.05\ seg$).
2. Una misma señal digital $x[n]$ puede ser entendida como el resultado del muestreo, para un mismo valor de T_m, de diferentes señales analógicas (de hecho, de infinitas señales analógicas). En la Figura 2(e-h), se muestra cómo la señal digital $y[n]$ puede ser entendida como el resultado del muestreo de tres señales analógicas diferentes: $y_1(t)$, $y_2(t)$ y $y_3(t)$, con $T_m = 0.05\ seg$ en los tres casos.

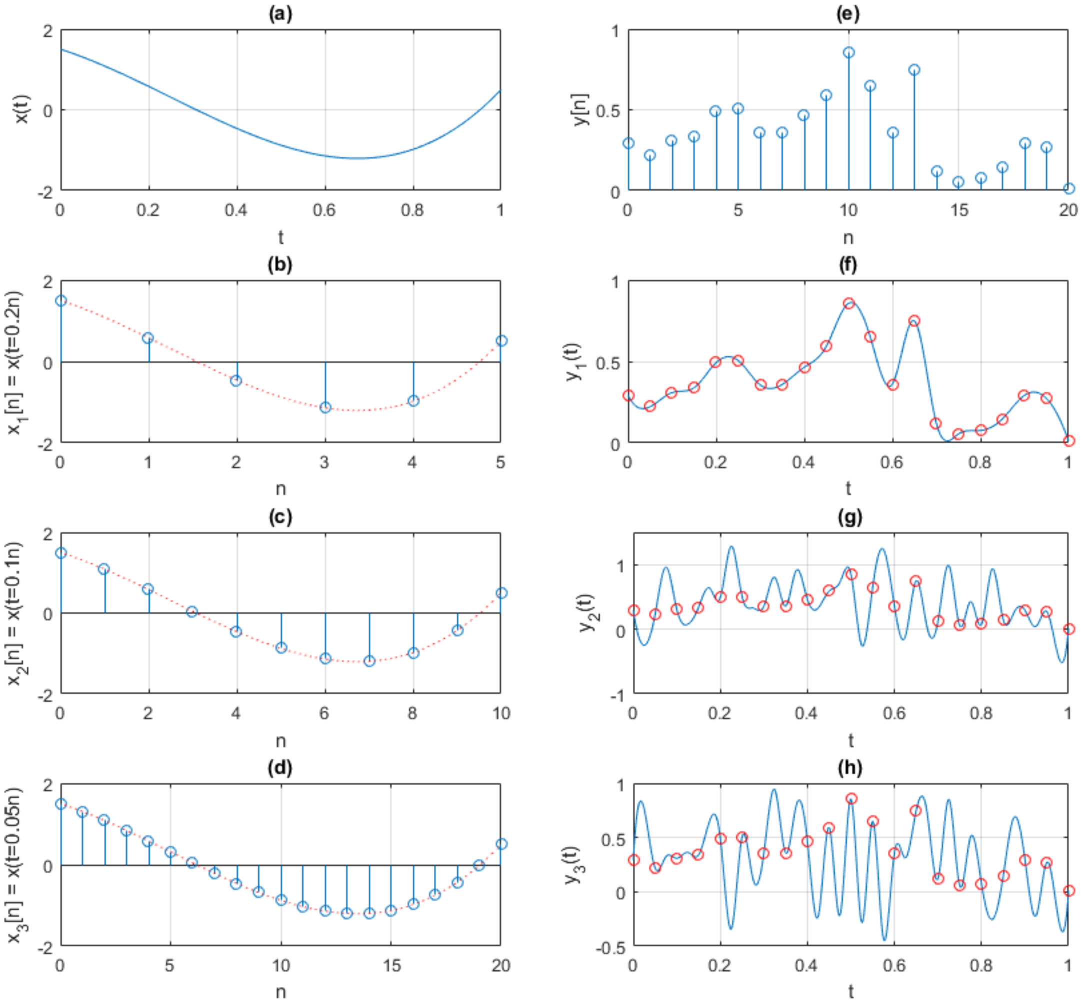

Figura 2. Relación entre las señales analógicas y las digitales a través del muestreo. (b-d) La línea punteada roja representa la amplitud de $x(t)$. (f-h) Los círculos rojos son las muestras de $y[n]$, lo cual permite observar fácilmente que $y[n] = y_1(t = 0.05n) = y_2(t = 0.05n) = y_3(t = 0.05n)$.

Y, por el momento, no es necesario comentar nada más sobre esta cuestión para ir avanzando en la teoría. Conviene tener claro que este tema es mucho más complejo y que aquí únicamente estamos planteando de forma muy sencilla un caso particular del mismo. Aunque solo sea intuitivamente, es fácil darse cuenta de algunas cosas:

- Tomar muestras cada T_m segundos es solo una forma posible de entender el muestreo. De hecho, a esta forma de muestrear se la denomina «muestreo uniforme» (con una separación constante entre instantes de muestreo consecutivos: el periodo de muestreo), pero está claro que es perfectamente posible definir el «muestreo no uniforme» de una señal analógica (con una separación variable entre instantes de muestreo consecutivos), o incluso tomando las muestras en instantes escogidos aleatoriamente, etc.
- Del mismo modo que puede obtenerse una señal digital a partir de una analógica, también es posible realizar el proceso en el sentido opuesto. De hecho, si una señal digital es realmente el resultado del muestreo de una cierta señal analógica, puede ser de gran interés volver a obtener la señal analógica original a partir de la señal digital obtenida en el muestreo. Pero, ¿es esto posible? Y, si lo es, ¿es siempre posible o solo bajo ciertas condiciones?

Como se ha comentado al inicio de este apartado, estas y otras cuestiones de interés se abordan en módulos posteriores, con el estudio del denominado «teorema del muestreo» (o «teorema de Nyquist») y de los procesos de conversión analógica-digital (obtención de una señal digital a partir de una analógica) y digital-analógica (obtención de una señal analógica a partir de una digital).

2. Operaciones básicas con señales

En esta sección se introducen las operaciones más habitualmente utilizadas en la definición y el manejo de señales: suma, resta, producto, división y potencia. Además, al final de la sección se estudian más en detalle dos casos particulares de la suma y el producto de señales.

Tal y como muestra la Tabla 1, todas las operaciones aritméticas elementales pueden usarse a la hora de operar entre señales, tanto analógicas como digitales. Se toman dos señales (operandos) y se les aplica una operación para obtener una nueva señal (resultado):

Suma	$y(t) = x_1(t) + x_2(t)$	$y[n] = x_1[n] + x_2[n]$
Resta	$y(t) = x_1(t) - x_2(t)$	$y[n] = x_1[n] - x_2[n]$
Producto	$y(t) = x_1(t) \cdot x_2(t) = x_1(t)x_2(t)$	$y[n] = x_1[n] \cdot x_2[n] = x_1[n]x_2[n]$
División	$y(t) = \dfrac{x_1(t)}{x_2(t)}$	$y[n] = \dfrac{x_1[n]}{x_2[n]}$
Potencia	$y(t) = x_1(t)^{x_2(t)}$	$y[n] = x_1[n]^{x_2[n]}$

Tabla 1. Operaciones aritméticas elementales definidas para señales tanto analógicas como digitales.

Aplicadas a señales, estas operaciones funcionan exactamente igual que aplicadas a escalares, puesto que, **para todo valor de la variable independiente, la amplitud correspondiente del resultado se obtiene aplicando la operación a las amplitudes correspondientes de los operandos**; es decir, que[3]:

$$y(t) = x_1(t) \boxtimes x_2(t) \;\Leftrightarrow\; y(t_i) = x_1(t_i) \boxtimes x_2(t_i)\,, \forall t_i \in \mathbb{R} \qquad (5)$$

$$y[n] = x_1[n] \boxtimes x_2[n] \;\Leftrightarrow\; y[n_i] = x_1[n_i] \boxtimes x_2[n_i]\,, \forall n_i \in \mathbb{Z} \qquad (6)$$

allí donde el operador $\boxtimes$ denota cualquiera de las operaciones definidas en la Tabla 1.

Las ecuaciones (5) y (6) pueden parecer complejas, pero en realidad dicen algo muy simple. El símbolo clave es la doble flecha ($\Leftrightarrow$), que, simplemente, indica que la ecuación situada a su izquierda y la ecuación situada a su derecha tienen exactamente el mismo significado[4].

Por ejemplo, tomando la ecuación (5) para el caso particular de la suma (es decir, para el caso particular en que el símbolo $\boxtimes$ simboliza la operación suma), lo que se nos está diciendo es que la operación suma definida para dos señales analógicas $x_1(t)$ y $x_2(t)$:

$$y(t) = x_1(t) + x_2(t) \qquad (7)$$

consiste en sumar punto a punto las amplitudes de ambas, de modo que la amplitud de la señal $y(t)$ en cualquier instante de tiempo (para cualquier valor de la variable independiente) es igual a la suma de las amplitudes de $x_1(t)$ y $x_2(t)$ en ese instante de tiempo:

[3] La ecuación (5) se puede generalizar fácilmente al caso de una señal analógica de variable compleja haciendo $y(s) = x_1(s) \boxtimes x_2(s) \;\Leftrightarrow\; y(s_i) = x_1(s_i) \boxtimes x_2(s_i)\,, \forall s_i \in \mathbb{C}$.

[4] El símbolo $\Leftrightarrow$ se lee como «si y solo si», o «es lo mismo que», o «es equivalente a».

$$y(t_i) = x_1(t_i) + x_2(t_i)\,, \forall t_i \in \mathbb{R} \tag{8}$$

Y lo mismo ocurre para cualquier otra operación (resta, producto, división o potencia), tanto en la ecuación (5) como en la (6). Es decir, que las operaciones básicas entre señales funcionan exactamente igual que las operaciones básicas entre funciones; no en vano, ya hemos visto en la sección anterior que una señal no es otra cosa que una función.

A partir de esta definición, se sigue trivialmente que **las propiedades conocidas de estas operaciones aplicadas al operar con escalares también se mantienen al operar con señales** (según cada caso: la propiedad conmutativa, la asociativa, la distributiva, etc.).

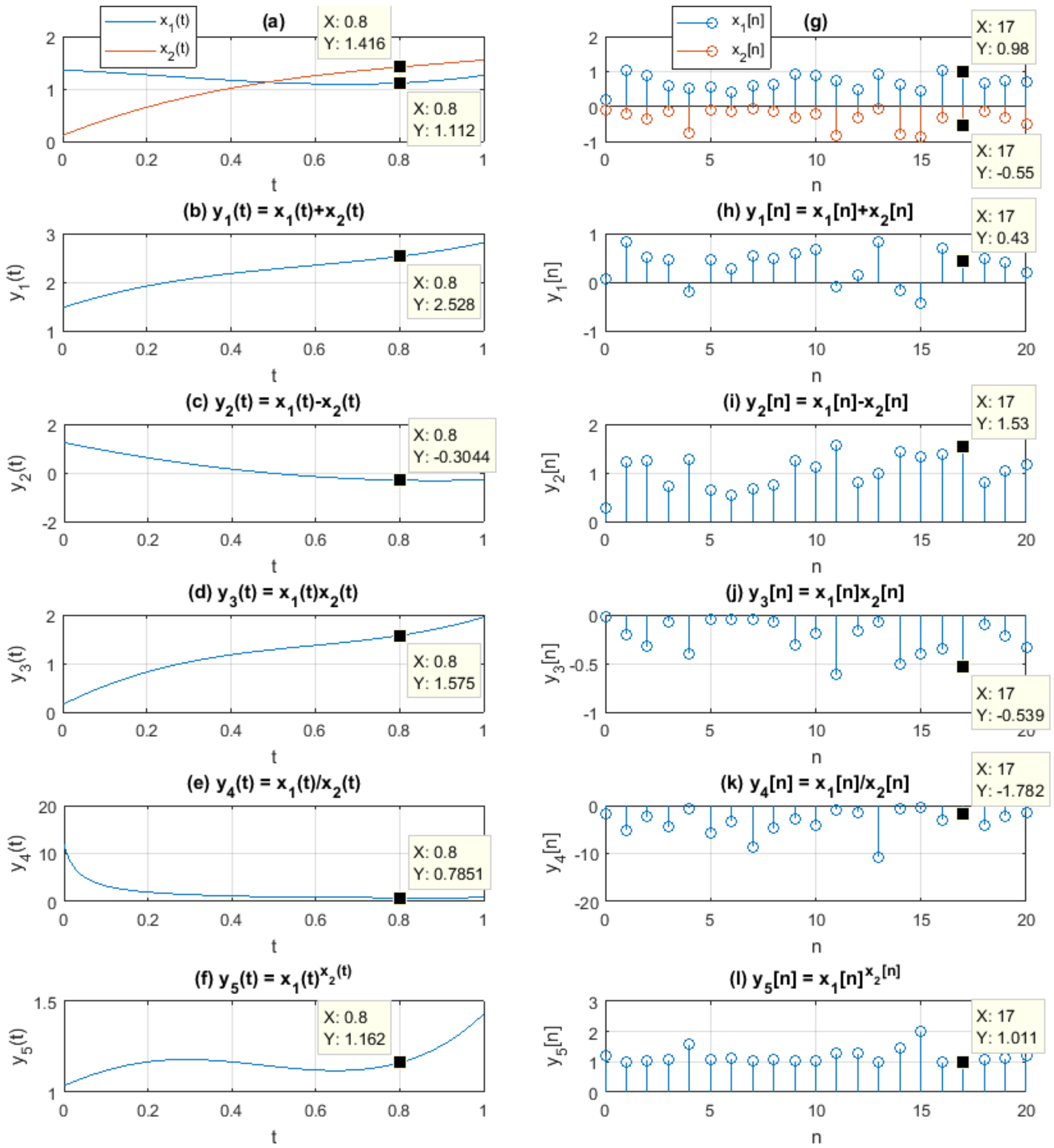

Figura 3. Ejemplos de operaciones aritméticas básicas con señales reales. (a-f) Las etiquetas indican los valores de amplitud de las señales analógicas para $t = 0.8$. (g-l) Las etiquetas indican los valores de amplitud de las señales digitales para $n = 17$.

En relación a estas operaciones, hay dos **transformaciones** muy habitualmente aplicadas a **señales reales**: el **desplazamiento vertical** de una señal (suma de una señal más una constante) y el **escalado en amplitud** de una señal (producto de una señal por una constante).

2.1. Desplazamiento vertical de una señal

La **suma de una señal más una constante** es una operación muy habitual en la práctica[5], consistente en que **a todos los valores de amplitud de la señal se les suma una constante**[6]:

$$y(t) = x(t) + K \iff y(t_i) = x(t_i) + K \,, \forall t_i \in \mathbb{R} \tag{9}$$

$$y[n] = x[n] + K \iff y[n_i] = x[n_i] + K \,, \forall n_i \in \mathbb{Z} \tag{10}$$

allí donde K es un valor constante[7].

Así, en términos de representación gráfica, el resultado de esta operación en **señales reales** (o sea, con $K \in \mathbb{R}$) consiste en un **desplazamiento vertical de la señal**:

- **La señal «sube»**, si la constante sumada es positiva **($K > 0$)**.
- **La señal «baja»**, si la constante sumada es negativa **($K < 0$)**[8].

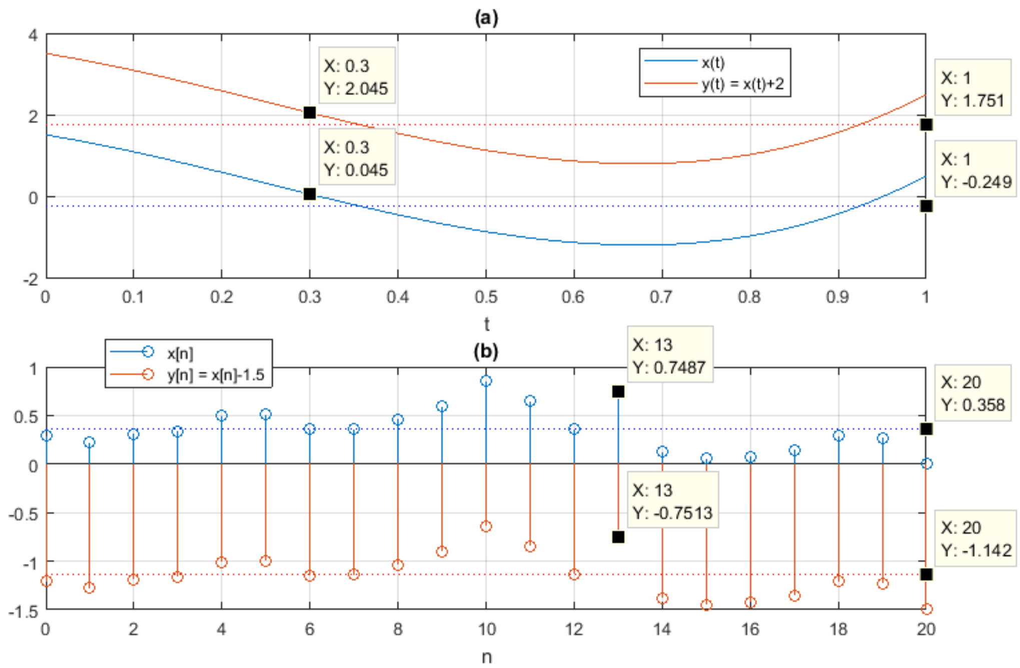

Figura 4. Ejemplos de desplazamiento vertical de señales reales. Las líneas punteadas azul y roja representan, en (a), los niveles del *offset* de $x(t)$ e $y(t) = x(t)$, respectivamente; y, en (b), los de $x[n]$ e $y[n]$, respectivamente.

En la Figura 4 se observa que **«la forma» de la señal no se ve modificada como resultado de sumarle o restarle una constante, sino que lo único que cambia es su ubicación vertical (la señal se desplaza a lo largo del eje de ordenadas)**; es decir, lo que cambia es el valor de

---

[5] Es un caso particular de la suma de señales: a una señal se le suma otra señal de amplitud constante, que es aquella cuyos valores de amplitud no varían a lo largo de toda la variable independiente.
[6] La ecuación (9) se puede generalizar fácilmente al caso de una señal analógica de variable compleja haciendo $y(s) = x(s) + K \iff y(s_i) = x(s_i) + K \,, \forall s_i \in \mathbb{C}$.
[7] Obviamente, con la resta sucede lo mismo: restarle K a una señal no es más que sumarle $(-K)$.
[8] Obviamente, al restar una señal menos una constante, ambos casos se dan al revés.

amplitud al que la señal está verticalmente «centrada». A este valor se le conoce como ***offset*** de la señal y es un parámetro de gran importancia que es estudiado más en detalle en el apartado 6.2 de este mismo módulo.

2.2. Escalado en amplitud de una señal

El **producto de una señal por una constante** es también muy habitual en la práctica[9] y consiste en que **todos los valores de amplitud de la señal quedan multiplicados por una constante**[10]:

$$y(t) = Kx(t) \iff y(t_0) = Kx(t_i)\,, \forall t_i \in \mathbb{R} \tag{11}$$

$$y[n] = Kx[n] \iff y[n_0] = Kx[n_i]\,, \forall n_i \in \mathbb{Z} \tag{12}$$

allí donde K es un valor constante que denominaremos **factor de escalado**[11].

Así, en términos de representación gráfica, el resultado de esta operación en **señales reales** (o sea, con $K \in \mathbb{R}$) consiste en un **escalado en amplitud de la señal**:

- **La señal se «expande» verticalmente**, si el módulo del factor de escalado es mayor que la unidad ($|\boldsymbol{K}| > \mathbf{1}$); es decir, la señal es **amplificada**.
- **La señal se «comprime» verticalmente**, si el módulo del factor de escalado es menor que la unidad ($|\boldsymbol{K}| < \mathbf{1}$); es decir, la señal es **atenuada**[12].

Asimismo, además de verse amplificada o atenuada, si el factor de escalado es negativo **($\boldsymbol{K} < \mathbf{0}$)**, se produce una **reflexión vertical de la señal**: cambia el signo de todos los valores de amplitud de la señal, de modo que **la señal «rota» verticalmente respecto del eje de abscisas** (sus partes positivas en amplitud pasan a ser negativas, y viceversa).

En la Figura 5 se observa que la amplificación, atenuación y/o reflexión vertical (según el caso) de la señal se realizan alrededor del valor de amplitud 0; es decir, que, **al escalar en amplitud una señal, «la forma» de la señal se «expande», «comprime» y/o «rota 180°» respecto del eje de abscisas**[13].

En la sección 6 de este mismo módulo, se estudia más en detalle cómo el factor de escalado que se le aplica a una señal afecta a los parámetros fundamentales de la misma: su **máximo** y su **mínimo**, su ***offset***, y su **energía** y su **potencia media**.

---

[9] Análogamente, se trata de un caso particular del producto de señales: una señal es multiplicada por otra de amplitud constante.

[10] La ecuación (11) se puede generalizar fácilmente al caso de una señal analógica de variable compleja haciendo $y(s) = Kx(s) \iff y(s_i) = Kx(s_i)\,, \forall s_i \in \mathbb{C}$.

[11] Obviamente, con la división sucede lo mismo: dividir una señal entre K es multiplicarla por $\left(\frac{1}{K}\right)$.

[12] Obviamente, al dividir una señal entre una constante, ambos casos se dan al revés.

[13] La «reflexión vertical» o «rotación de 180°» respecto del eje de abscisas puede entenderse también como un «efecto espejo» o «*flip*» sobre el eje de abscisas.

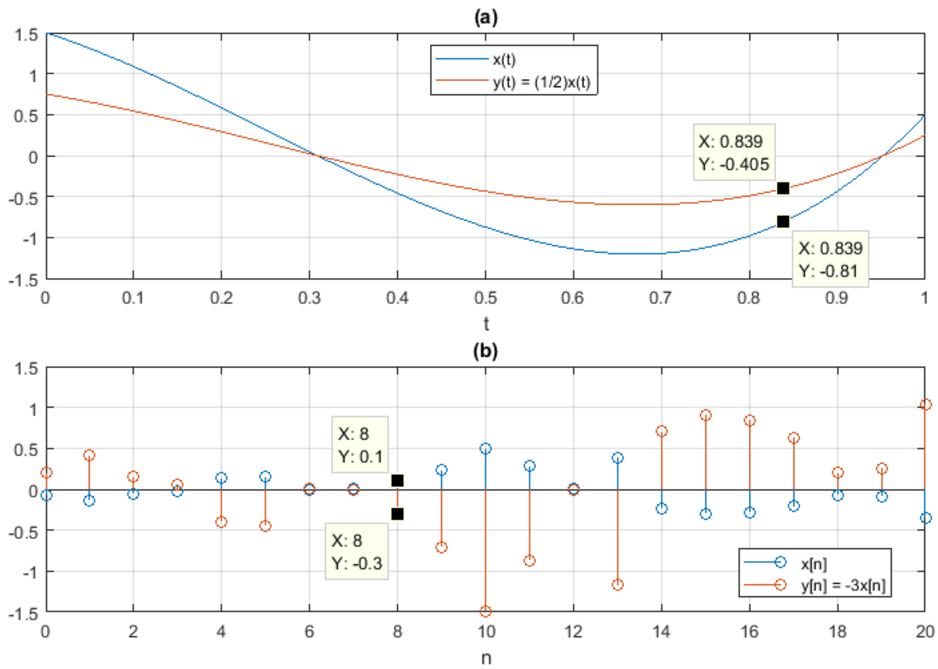

Figura 5. Ejemplos de escalado en amplitud de una señal: (a) $y(t) = \frac{1}{2}x(t)$; (b) $y[n] = -3x[n]$.

3. Funciones básicas para definir señales

Puesto que, las señales no son más que funciones de una variable independiente, toda función conocida del cálculo matemático puede ser utilizada para definir señales (polinomios, exponenciales, logaritmos, funciones trigonométricas, etc.). En esta sección se presentan algunas definiciones básicas de señales a partir de familias de funciones matemáticas conocidas y ampliamente usadas en la práctica.

Así, a continuación repasaremos cuáles son las principales familias de funciones matemáticas que se usan para definir señales:

- Señales polinómicas.
- Señales exponenciales.
- Señales logarítmicas.
- Señales trigonométricas.
- Señales definidas por intervalos.

Aunque en la sección 7 se estudian las señales típicas más importantes, en la presente sección ya se introducen algunas herramientas básicas de uso muy habitual, y se empiezan a plantear y resolver ejercicios de representación gráfica de señales.

3.1. Señales polinómicas

En primer lugar, está la familia de las señales polinómicas, que son aquellas que pueden ser expresadas **en forma de polinomio de su variable independiente**.

En general, toda **señal polinómica** es de la forma:

$$x(t) = \sum_{i=k}^{l} a_i t^i = a_k t^k + a_{k+1} t^{k+1} + \cdots + a_{l-1} t^{l-1} + a_l t^l \qquad (13)$$

$$x[n] = \sum_{i=k}^{l} a_i n^i = a_k n^k + a_{k+1} n^{k+1} + \cdots + a_{l-1} n^{l-1} + a_l n^l \qquad (14)$$

allí donde los coeficientes a_i son constantes $\forall i \in \{k, \dots, l\}$, $i, k, l \in \mathbb{Z}$, siendo $k \leq l$, y donde el valor de l determina el **orden** (o **grado**) de la señal polinómica.

Más concretamente, las **señales polinómicas reales** son aquellas en las que **todos los coeficientes son valores reales**: $a_i \in \mathbb{R}, \forall i \in \mathbb{Z}$. De no darse esta condición, estaríamos trabajando con **señales polinómicas complejas**, cuyas particularidades son tratadas en el apartado 5.1 de este mismo módulo.

Señales muy habituales en la práctica, como la **señal constante** (señal polinómica de orden 0):

$$x(t) = a_0 \tag{15}$$

$$x[n] = a_0 \tag{16}$$

allí donde el coeficiente a_0 es una constante (es decir, no es una función que depende de t o n, respectivamente), o la **señal en forma de recta** (señal polinómica de orden 1):

$$x(t) = a_0 + a_1 t \tag{17}$$

$$x[n] = a_0 + a_1 n \tag{18}$$

allí donde el coeficiente a_0 es la ordenada en el origen y el coeficiente a_1 es la pendiente de la recta, no son sino casos particulares de señales polinómicas reales.

A continuación, se plantean dos ejercicios de representación gráfica de señales polinómicas.

Ejemplo 1

Tenemos las siguientes señales analógicas polinómicas reales:

$$x_1(t) = -\frac{2}{3} \tag{19}$$

$$x_2(t) = 0.5 + t - 2t^2 + t^3 \tag{20}$$

Se pide representarlas gráficamente para $t \in [-1,1]$.

Solución

Para una versión extendida y detallada del uso de MATLAB en la resolución de este ejercicio, se recomienda consultar el Anexo de este módulo.

Se observa que $x_1(t)$ es una señal analógica constante negativa y que $x_2(t)$ es una señal analógica polinómica de orden cúbico:

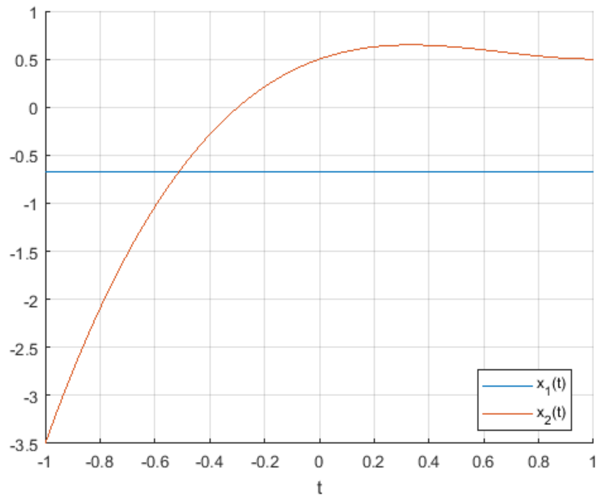

Figura 6. Representación gráfica conjunta de $x_1(t)$ y $x_2(t)$.

Ejemplo 2

Tenemos las siguientes señales digitales polinómicas reales:

$$x_1[n] = 1 + 2n \tag{21}$$

$$x_2[n] = 3 - n - \frac{1}{10}n^2 \tag{22}$$

Se pide representarlas gráficamente para $n \in \{-10, \dots, 10\}$.

Solución

Para una versión extendida y detallada del uso de MATLAB en la resolución de este ejercicio, se recomienda consultar el Anexo de este módulo.

Se observa que $x_1[n]$ es una recta discreta de ordenada en el origen igual a 1 y pendiente igual a 2 y que $x_2[n]$ es una señal discreta polinómica de orden cuadrático:

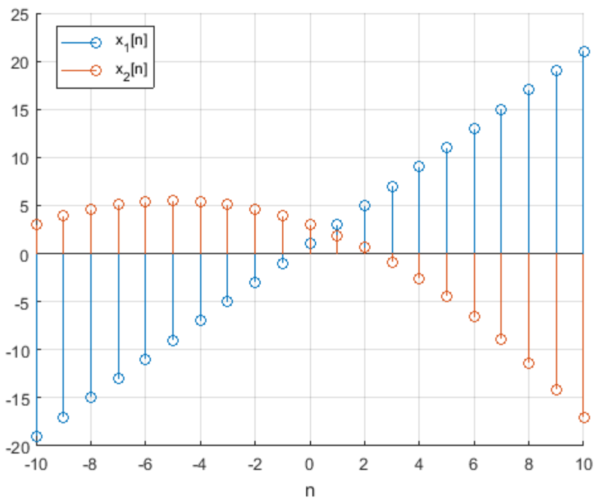

Figura 7. Representación gráfica de $x_1[n]$ y $x_2[n]$.

Finalmente, completamos este repaso recordando las reglas de derivación de las funciones polinómicas, que se aplican directamente a fin de poder calcular **la derivada de una señal polinómica analógica** (por ser esta de variable continua, ya sea real o compleja).

Partiendo de (13), la derivada respecto de t de una señal polinómica analógica $x(t)$ es:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{d\left(\sum_{i=k}^{l} a_i t^i\right)}{dt} = \sum_{i=k}^{l} a_i \frac{d(t^i)}{dt} = \sum_{i=k}^{l} i a_i t^{i-1} = \sum_{i=k}^{l} b_i t^{i-1} \tag{23}$$

allí donde los coeficientes b_i son tales que $b_i = i a_i$, $\forall i \in \{k, \dots, l\}$.

Por tanto, se trata de **una nueva señal polinómica analógica** $x'(t)$, de 1 grado inferior a $x(t)$, de la forma:

$$x'(t) = \frac{dx(t)}{dt} = k a_k t^{k-1} + (k+1) a_{k+1} t^k + \dots + l a_l t^{l-1} \tag{24}$$

Es importante notar que, en general, **el cálculo diferencial e integral no se aplica a las señales digitales, por ser estas de variable discreta**.

3.2. Señales exponenciales

En segundo lugar, están las señales exponenciales, que son aquellas que tienen **forma de función exponencial, donde la base es una constante y la variable independiente está en el exponente**. Por tanto, una señal exponencial no es sino un caso particular de la operación potencia entre dos señales (ver Tabla 1), donde la base es una señal de amplitud constante y el exponente es una señal cualquiera.

En general, toda **señal exponencial** es de la forma:

$$x(t) = a^{y(t)} \tag{25}$$

$$x[n] = a^{y[n]} \tag{26}$$

allí donde a es una constante denominada **base de la exponencial**, $y(t)$ e $y[n]$ son dos señales cualesquiera. Se dice que las señales $x(t)$ y $x[n]$ son **señales exponenciales en base $\boldsymbol{a}$**.

Las **señales exponenciales reales** son aquellas señales exponenciales que cumplen con las siguientes condiciones:

$$x(t) = {a_1}^{y(t)} \tag{27}$$

$$x[n] = {a_2}^{y[n]} \tag{28}$$

allí donde:

- a_1 es una **constante real positiva** ($a_1 \in \mathbb{R}, a_1 > 0$).
- a_2 es una **constante real** ($a_2 \in \mathbb{R}$).
- $y(t)$ e $y[n]$ son dos **señales reales**.

Cuando se da el caso que las constantes a_1 y a_2 no cumplen con estas condiciones, o cuando, independientemente de eso, se da el caso que $y(t)$ e $y[n]$ son señales complejas, entonces $x(t)$ y $x(t)$ son **señales exponenciales complejas**, cuyas particularidades son tratadas en el apartado 5.1 de este mismo módulo.

Más concretamente, un caso de especial relevancia práctica es el de las **señales exponenciales reales más básicas**, que son aquellas señales exponenciales reales en las que $y(t) = t$, o $y[n] = n$; es decir, que son aquellas señales exponenciales reales **en las que el exponente es la variable independiente**:

$$x(t) = {a_1}^t \quad (29)$$

$$x[n] = {a_2}^n \quad (30)$$

donde a_1 es una constante real positiva ($a_1 \in \mathbb{R}\,, a_1 > 0$) y a_2 es una constante real ($a_2 \in \mathbb{R}$).

El **comportamiento a lo largo del tiempo de las señales exponenciales reales básicas** depende de los valores adoptados por las constantes a_1 y a_2.

En el caso analógico:

- Si $\boldsymbol{0 < a_1 < 1}$, $x(t)$ es de **monotonía estrictamente decreciente**: su amplitud decae con el tiempo, tendiendo a $+\infty$ para valores de t muy negativos ($x(t \to -\infty) \to +\infty$) y a 0 para valores de t muy positivos ($x(t \to +\infty) \to 0$).
- Si $\boldsymbol{a_1 > 1}$, $x(t)$ es de **monotonía estrictamente creciente**: su amplitud aumenta con el tiempo, tendiendo a 0 para valores de t muy negativos ($x(t \to -\infty) \to 0$) y a $+\infty$ para valores de t muy positivos ($x(t \to +\infty) \to +\infty$).

Y en el caso digital:

- Si $\boldsymbol{a_2} > 0$, el comportamiento de $x[n]$ respecto de a_2 es análogo al de $x(t)$ respecto de a_1; es decir:
  - Si $\boldsymbol{0 < a_2 < 1}$, $x[n]$ es una **sucesión monótona estrictamente decreciente**: a medida que el tiempo avanza, cada valor de amplitud es menor que el anterior ($x[n_i] < x[n_i - 1]$), tendiendo la amplitud a $+\infty$ para valores de n muy negativos ($x[n \to -\infty] \to +\infty$) y a 0 para valores de n muy positivos ($x[n \to +\infty] \to 0$).
  - Si $\boldsymbol{a_2 > 1}$, $x[n]$ es una **sucesión monótona estrictamente creciente**: a medida que el tiempo avanza, cada valor de amplitud es mayor que el anterior ($x[n_i] > x[n_i - 1]$), tendiendo la amplitud a 0 para valores de n muy negativos ($x[n \to -\infty] \to 0$) y a $+\infty$ para valores de n muy positivos ($x[n \to +\infty] \to +\infty$).
- Si $\boldsymbol{a_2 < 0}$, $x[n]$ es una **sucesión alternada**: sus valores de amplitud son positivos para valores de n pares ($x[n_i] > 0\,, \forall n_i = 2m\,, m \in \mathbb{Z}$) y negativos para valores de n impares ($x[n_i] < 0\,, \forall n_i = 2m + 1\,, m \in \mathbb{Z}$). Y, además de esto:
  - Si $\boldsymbol{-1 < a_2 < 0}$, la amplitud de $x[n]$ tiende alternadamente a 0 para valores de n muy positivos ($x[n \to +\infty] \to 0$).
  - Si $\boldsymbol{a_2 < -1}$, la amplitud de $x[n]$ tiende alternadamente a 0 para valores de n muy negativos ($x[n \to -\infty] \to 0$).

Con el fin de ilustrar estos comportamientos aquí descritos, a continuación se plantea un ejercicio de representación gráfica de señales exponenciales reales básicas. En las tres gráficas de la Figura 8 pueden identificarse claramente dichos comportamientos.

Ejemplo 3

Se pide representar gráficamente las siguientes señales exponenciales reales básicas en los intervalos $t \in [-10,10]$, para las señales analógicas, y $n \in \{-6, \ldots, 6\}$, para las señales digitales:

$$x_1(t) = e^t \tag{31}$$

$$x_2(t) = \left(\frac{1}{e}\right)^t \tag{32}$$

$$x_3[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n \tag{33}$$

$$x_4[n] = 2^n \tag{34}$$

$$x_5[n] = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \tag{35}$$

$$x_6[n] = (-2)^n \tag{36}$$

Solución

Para una versión extendida y detallada del uso de MATLAB en la resolución de este ejercicio, se recomienda consultar el Anexo de este módulo.

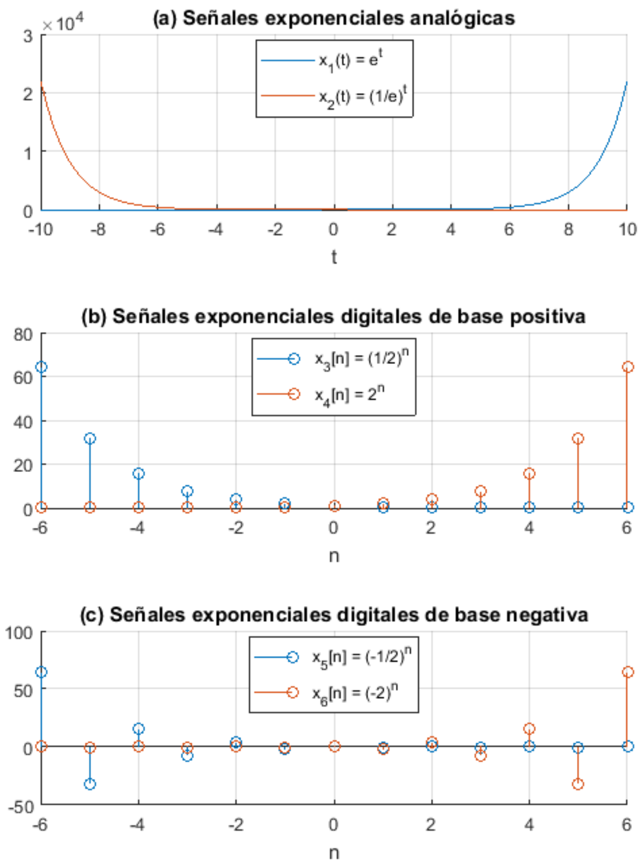

Figura 8. Representación gráfica de señales exponenciales reales básicas.

Asimismo, yendo un poco más allá de las señales exponenciales reales básicas, unas **señales exponenciales reales** muy habitualmente usadas en la práctica son aquellas en las que los exponentes de las señales son funciones polinómicas. Es decir, partiendo de las ecuaciones

(27) y (28), son aquellas en que $y(t)$ e $y[n]$ son señales reales de la forma definida en las ecuaciones (13) y (14).

A continuación, se plantea un ejercicio de representación gráfica de dos señales de este tipo.

Ejemplo 4

Se pide representar gráficamente las siguientes señales exponenciales reales en los intervalos $t \in [-4,4]$ y $n \in \{-6, \dots, 6\}$:

$$x_1(t) = e^{-t^2} \tag{37}$$

$$x_2[n] = 0.9^{-0.1n^2-2n+1} \tag{38}$$

Solución

Para una versión extendida y detallada del uso de MATLAB en la resolución de este ejercicio, se recomienda consultar el Anexo de este módulo.

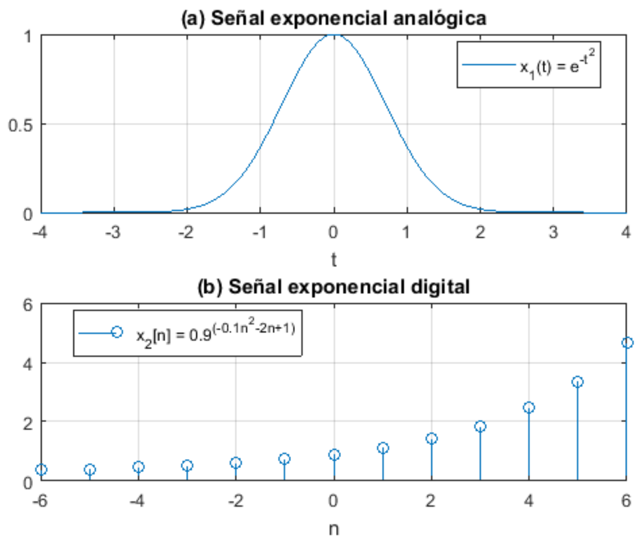

Figura 9. Representación gráfica de señales exponenciales reales con exponente polinómico.

Finalmente, completamos este repaso recordando las reglas de derivación de las funciones exponenciales, que se aplican directamente a fin de poder calcular **la derivada de una señal exponencial analógica**.

Partiendo de la ecuación (25), la derivada respecto de t de una señal exponencial analógica $x(t)$ es de la forma:

$$x'(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d\left(a^{y(t)}\right)}{dt} = \ln(a)\frac{dy(t)}{dt}a^{y(t)} = \ln(a)\, y'(t)x(t) \tag{39}$$

siendo $\ln(a)$ el logaritmo neperiano de a, e $y'(t)$ la derivada de $y(t)$ respecto de t.

Por tanto, se trata de una nueva señal analógica definida como **el producto del logaritmo neperiano de la base de $x(t)$, la derivada del exponente de $x(t)$, y $x(t)$**.

En el caso de **la señal exponencial analógica básica de base e**, su señal derivada es ella misma:

$$\frac{d(e^t)}{dt} = e^t \tag{40}$$

3.3. Señales logarítmicas

En tercer lugar, están las señales logarítmicas, que son aquellas que tienen **forma de función logarítmica, donde la variable independiente aparece en el argumento del logaritmo**.

En general, toda **señal logarítmica** es de la forma:

$$x(t) = \log_a\big(y(t)\big) \tag{41}$$

$$x[n] = \log_a(y[n]) \tag{42}$$

siendo a una constante real positiva distinta de la unidad ($a \in \mathbb{R}^+, a \neq 1$), $y(t)$ e $y[n]$ dos señales cualesquiera, y donde $x(t)$ y $x[n]$ son **señales logarítmicas en base a**.

Para un repaso sobre logaritmos, se recomienda consultar el Anexo de este módulo.

Finalmente, nos limitaremos a recordar las reglas de derivación de las funciones logarítmicas, que se aplican directamente a fin de poder calcular **la derivada de una señal logarítmica analógica**.

La derivada respecto de t de una señal logarítmica analógica $x(t)$ es de la forma:

$$x'(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d\big(\log_a\big(y(t)\big)\big)}{dt} = \frac{\log_a(e)\frac{dy(t)}{dt}}{y(t)} = \log_a(e)\frac{y'(t)}{y(t)} \tag{43}$$

allí donde $y'(t)$ es la derivada de $y(t)$ respecto de t.

Un caso interesante es el de **la derivada del logaritmo neperiano de una señal cualquiera**:

$$\frac{d\big(\ln\big(y(t)\big)\big)}{dt} = \frac{y'(t)}{y(t)} \tag{44}$$

3.4. Señales trigonométricas

La última familia de funciones básicas que veremos es la de las funciones trigonométricas. Nuestro repaso será breve y conciso, ya que el caso particular de la señal sinusoidal constituye una de las señales típicas que se estudian en detalle más adelante (ver apartado 7.4).

Una **señal trigonométrica** es aquella que **tiene forma de función trigonométrica, donde la variable independiente aparece en el argumento de la función**. Esto incluye a toda la familia de las funciones trigonométricas, de entre las que destacan, por ser las más habituales en la práctica, las funciones seno (sin), coseno (cos) y tangente (tan).

Así, tomando el seno a modo de ejemplo:

$$x(t) = \sin\big(y(t)\big) \tag{45}$$

$$x[n] = \sin(y[n]) \tag{46}$$

siendo $y(t)$ e $y[n]$ dos señales cualesquiera. Para el resto de señales trigonométricas, solo hay que cambiar la función sin en las ecuaciones (45) y (46) por $\cos$, $\tan$, $\csc$, $\sec$, $\cot$, $\arcsin$, $\arccos$, o $\arctan$, según sea el caso.

Para un repaso sobre funciones trigonométricas, incluyendo y muy especialmente las **fórmulas de Euler**, se recomienda consultar el Anexo de este módulo.

Finalmente, recordemos aquí las reglas de derivación de las funciones trigonométricas, que se aplican al cálculo de **las derivadas de las señales trigonométricas analógicas**. Además, por estar tan estrechamente relacionada con las señales trigonométricas mediante las fórmulas de Euler, añadiremos también **la derivada de la señal exponencial compleja analógica**, que se deriva según lo indicado en la ecuación (39):

$$\frac{d\sin\big(y(t)\big)}{dt} = y'(t)\cos\big(y(t)\big) \tag{47}$$

$$\frac{d\cos\big(y(t)\big)}{dt} = -y'(t)\sin\big(y(t)\big) \tag{48}$$

$$\frac{d\tan\big(y(t)\big)}{dt} = \frac{y'(t)}{\cos^2\big(y(t)\big)} = y'(t)\Big(1+\tan^2\big(y(t)\big)\Big) \tag{49}$$

$$\frac{de^{jy(t)}}{dt} = jy'(t)e^{jy(t)} = y'(t)\Big(-\sin\big(y(t)\big) + j\cos\big(y(t)\big)\Big) \tag{50}$$

allí donde $y(t)$ es una señal analógica cualquiera, y donde $y'(t) = \frac{dy(t)}{dt}$.

3.5. Señales definidas por intervalos

Finalmente, una señal puede estar constituida por distintas señales de diferente naturaleza, ocupando cada una su intervalo correspondiente a lo largo de la variable independiente.

Definir una **señal por intervalos** consiste en **establecer diferentes intervalos (tramos de valores de la variable independiente) y la forma de la señal en cada uno de ellos**:

$$x(t) = \begin{cases} x_1(t) & \text{para} \quad t_1 \leq t < t_2 \\ x_2(t) & \text{para} \quad t_2 \leq t < t_3 \\ x_3(t) & \text{para} \quad t_3 \leq t < t_4 \\ \vdots & \qquad\qquad \vdots \\ x_M(t) & \text{para} \quad t_M \leq t < t_{M+1} \end{cases} \tag{51}$$

$$x[n] = \begin{cases} x_1[n] & \text{para} \quad n_1 \leq n < n_2 \\ x_2[n] & \text{para} \quad n_2 \leq n < n_3 \\ x_3[n] & \text{para} \quad n_3 \leq n < n_4 \\ \vdots & \qquad\qquad \vdots \\ x_M[n] & \text{para} \quad n_M \leq n < n_{M+1} \end{cases} \tag{52}$$

allí donde M es el número total de intervalos; t_i y n_i son los límites iniciales del intervalo i-ésimo; y $x_i(t)$ y $x_i[n]$ son las señales que definen en su intervalo i-ésimo a $x(t)$ y $x[n]$, respectivamente.

Se observa que la definición de los límites de cada intervalo también puede ser expresada mediante notación conjuntista:

$$x(t) = \begin{cases} x_1(t) & \text{para} \quad t \in [t_1, t_2) \\ x_2(t) & \text{para} \quad t \in [t_2, t_3) \\ x_3(t) & \text{para} \quad t \in [t_3, t_4) \\ \vdots & \qquad\qquad \vdots \\ x_M(t) & \text{para} \quad t \in [t_M, t_{M+1}) \end{cases} \tag{53}$$

$$x[n] = \begin{cases} x_1[n] & \text{para} \quad n \in \{n_1, \dots, n_2 - 1\} \\ x_2[n] & \text{para} \quad n \in \{n_2, \dots, n_3 - 1\} \\ x_3[n] & \text{para} \quad n \in \{n_3, \dots, n_4 - 1\} \\ \vdots & \qquad\qquad \vdots \\ x_M[n] & \text{para} \quad n \in \{n_M, \dots, n_{M+1} - 1\} \end{cases} \tag{54}$$

En el caso más general, la sucesión de intervalos en que se define una señal recorre la variable independiente en su totalidad, es decir, de $-\infty$ a $+\infty$. Si este es el caso, está claro que:

- $t_1 \to -\infty$; $t_{M+1} \to +\infty$; el primer intervalo es $t < t_2$, o $t \in (-\infty, t_2)$; y el último es $t \geq t_M$, o $t \in [t_M, +\infty)$.
- $n_1 \to -\infty$; $n_{M+1} \to +\infty$, el primer intervalo es $n < n_2$ y el último es $n \geq n_M$.

A continuación, se propone un ejercicio de representación gráfica de señales definidas por intervalos.

Ejemplo 5

Se tienen las dos señales siguientes definidas por intervalos:

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad t < 0 \\ 10^t - 1 & \text{para} \quad 0 \leq t < 1 \\ 10 - 10^{t-1} & \text{para} \quad 1 \leq t < 2 \\ 0 & \text{para} \quad t \geq 2 \end{cases} \tag{55}$$

$$y[n] = \begin{cases} 4 + 4n + 4n^2 & \text{para} \quad n < -2 \\ 0 & \text{para} \quad -2 \leq n < 3 \\ -4 - 4n - 4n^2 & \text{para} \quad n \geq 3 \end{cases} \tag{56}$$

Se pide representarlas gráficamente en los intervalos $t \in [-1{,}3]$ y $n \in \{-20, \dots ,20\}$.

Solución

Para una versión extendida y detallada del uso de MATLAB en la resolución de este ejercicio, se recomienda consultar el Anexo de este módulo.

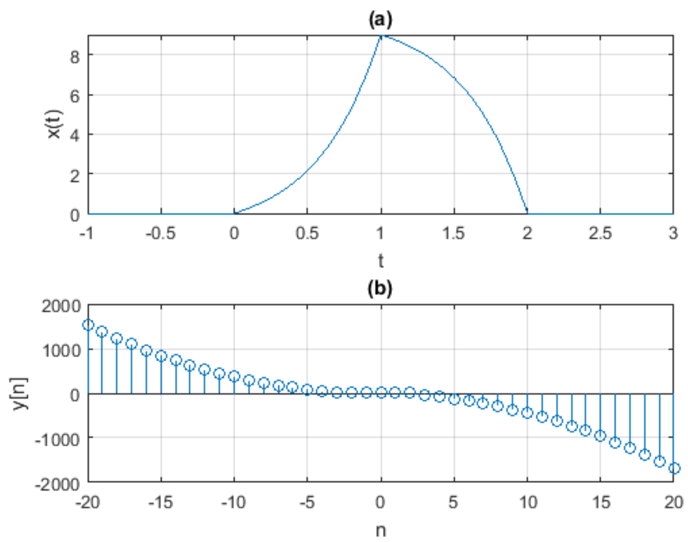

Figura 10. Representación gráfica de señales definidas por intervalos.

Finalmente, **la derivada de una señal analógica definida por intervalos** se obtiene aplicando el cálculo de la derivada en cada intervalo por separado, de tal manera que la señal derivada resultante queda también definida por la misma división de intervalos que su señal primitiva:

Partiendo de la ecuación (51), la derivada respecto de t una señal analógica definida por intervalos $x(t)$ es de la forma:

$$x'(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \begin{cases} x_1'(t) & \text{para} \quad t_1 \leq t < t_2 \\ x_2'(t) & \text{para} \quad t_2 \leq t < t_3 \\ x_3'(t) & \text{para} \quad t_3 \leq t < t_4 \\ \vdots & \qquad\quad \vdots \\ x_M'(t) & \text{para} \quad t_M \leq t < t_{M+1} \end{cases} \tag{57}$$

allí donde $x_i'(t) = \frac{dx_i(t)}{dt}$, $\forall i \in \{1, \dots, M\}$.

Es importante notar que $x(t)$ puede presentar problemas de derivabilidad en los puntos de separación entre intervalos, es decir, en $t = t_i$, $\forall i \in \{1, \dots , M\}$.

4. Transformaciones de la variable independiente

En los apartados 2.1 y 2.2 de este mismo módulo, ya hemos estudiado las dos transformaciones más básicas que se le pueden aplicar a una señal (sumarle una constante y multiplicarla por una constante), poniendo especial énfasis en sus efectos desde el punto de vista de la representación gráfica de señales reales: el **desplazamiento vertical** de la señal y el **escalado en amplitud de la señal**, respectivamente.

En esta sección, vamos a completar el estudio de las transformaciones básicas de señales, introduciendo las **transformaciones que más habitualmente se le aplican a la variable independiente de una señal** y poniendo especial atención, de nuevo, en qué efectos tienen en la representación gráfica de las señales reales. Estas transformaciones, y sus correspondientes efectos en señales reales, son las siguientes:

- Sumarle una constante a la variable independiente, provocando el **desplazamiento horizontal** de la señal.
- Cambio de signo de la variable independiente, provocando la **reflexión horizontal sobre el eje de ordenadas** de la señal.
- Multiplicar la variable independiente por una constante positiva, provocando la **compresión/expansión horizontal** de la señal.

Es importante destacar lo siguiente: los efectos que estas transformaciones de la variable independiente provocan en las representaciones gráficas de las señales reales nos van a interesar únicamente en los casos de señales de variable entera (por ejemplo: $x[n]$, con $n \in \mathbb{Z}$) o señales de variable real (por ejemplo: $x(t)$, con $t \in \mathbb{R}$), pero no así en el caso de señales de variable compleja (por ejemplo, $x(s)$, con $s \in \mathbb{C}$). Esto es debido a que, en términos generales, tanto en este módulo como en los módulos posteriores, no vamos a necesitar representar gráficamente señales de variable compleja.

4.1. Desplazamiento horizontal

El **sumarle/restarle una constante a la variable independiente de una señal** es una transformación muy habitual en la práctica que consiste en **desplazar la señal a lo largo de la variable independiente**[14]:

$$y(t) = x(t \pm t_0) \iff y(t_i) = x(t_i \pm t_0)\,, \forall t_i \in \mathbb{R} \tag{58}$$

$$y[n] = x[n \pm n_0] \iff y[n_i] = x[n_i \pm n_0]\,, \forall n_i \in \mathbb{Z} \tag{59}$$

allí donde $\boldsymbol{t_0} \in \mathbb{R}$ y $\boldsymbol{n_0} \in \mathbb{Z}$, siendo ambas dos **constantes positivas ($\boldsymbol{t_0}, \boldsymbol{n_0} > \mathbf{0}$)**.

[14] La ecuación (58) se puede generalizar fácilmente al caso de una señal analógica de variable compleja haciendo $y(s) = x(s \pm s_0) \iff y(s_i) = x(s_i \pm s_0)\,, \forall s_i \in \mathbb{C}$, siendo $s_0 \in \mathbb{C}$.

En términos de representación gráfica, el resultado de esta transformación de la variable independiente en **señales reales** consiste en un **desplazamiento horizontal de la señal**, de modo tal que **el sentido del desplazamiento viene determinado por el hecho de si la constante está siendo sumada o restada**:

- **La señal «se atrasa»**, es decir, **se desplaza en el sentido positivo de la variable independiente** (o sea, **«hacia la derecha»**), si la constante está siendo **restada**.
- **La señal «se adelanta»**, es decir, **se desplaza en el sentido negativo de la variable independiente** (es decir, **«hacia la izquierda»**), si la constante está siendo **sumada**.

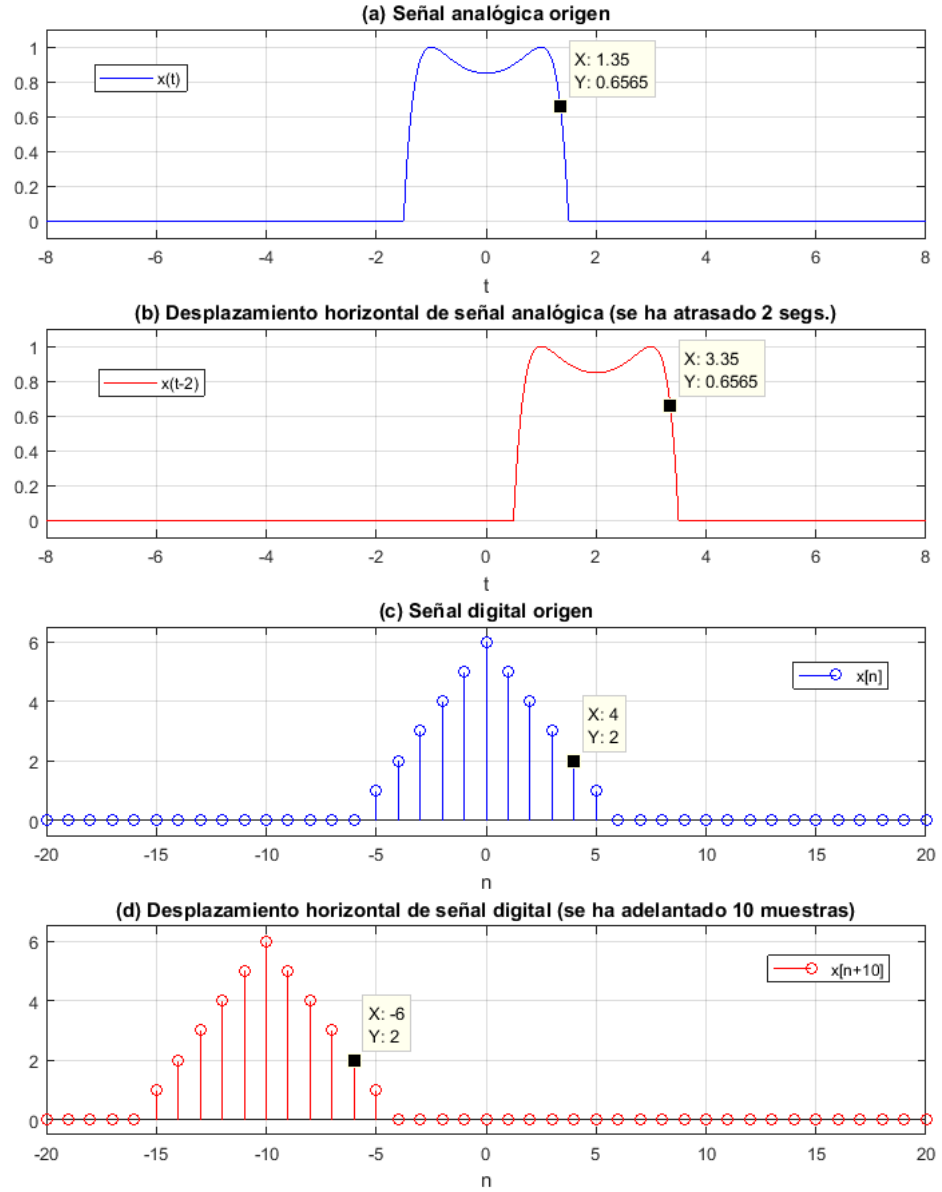

Figura 11. Ejemplos de desplazamiento horizontal de señales reales.

En la Figura 11 se ilustran estos efectos, que a continuación son descritos pormenorizadamente, caso por caso:

- Si $\boldsymbol{y(t) = x(t - t_0)}$, entonces $\boldsymbol{y(t)}$ **es igual a** $\boldsymbol{x(t)}$ **desplazada** $\boldsymbol{t_0}$ **segundos «hacia la derecha» (o sea, en el sentido positivo de** $\boldsymbol{t}$**)**; por ejemplo, para $t = 0$, donde antes de la transformación estaba $x(0)$, ahora está $y(0) = x(0 - t_0) = x(-t_0)$: el valor de amplitud $x(-t_0)$ se ha desplazado desde $t = -t_0$ hasta $t = 0$ (o sea, **se ha «atrasado»** $\boldsymbol{t_0}$ **segundos**).
- Si $\boldsymbol{y[n] = x[n - n_0]}$, entonces $\boldsymbol{y[n]}$ **es igual a** $\boldsymbol{x[n]}$ **desplazada** $\boldsymbol{n_0}$ **muestras «hacia la derecha» (o sea, en el sentido positivo de** $\boldsymbol{n}$**)**; por ejemplo, para $n = 0$, donde antes de la transformación estaba $x[0]$, ahora está $y[0] = x[0 - n_0] = x[-n_0]$: el valor de amplitud $x[-n_0]$ se ha desplazado desde $n = -n_0$ hasta $n = 0$ (o sea, **se ha «atrasado»** $\boldsymbol{n_0}$ **muestras**).
- Si $\boldsymbol{y(t) = x(t + t_0)}$, entonces $\boldsymbol{y(t)}$ **es igual a** $\boldsymbol{x(t)}$ **desplazada** $\boldsymbol{t_0}$ **segundos «hacia la izquierda» (o sea, en el sentido negativo de** $\boldsymbol{t}$**)**; por ejemplo, para $t = 0$, donde antes de la transformación estaba $x(0)$, ahora está $y(0) = x(0 + t_0) = x(t_0)$: el valor de amplitud $x(t_0)$ se ha desplazado desde $t = t_0$ hasta $t = 0$ (o sea, **se ha «adelantado»** $\boldsymbol{t_0}$ **segundos**).
- Si $\boldsymbol{y[n] = x[n + n_0]}$, entonces $\boldsymbol{y[n]}$ **es igual a** $\boldsymbol{x[n]}$ **desplazada** $\boldsymbol{n_0}$ **muestras «hacia la izquierda» (o sea, en el sentido negativo de** $\boldsymbol{n}$**)**; por ejemplo, para $n = 0$, donde antes de la transformación estaba $x[0]$, ahora está $y[0] = x[0 + n_0] = x[n_0]$: el valor de amplitud $x[n_0]$ se ha desplazado desde $n = n_0$ hasta $n = 0$ (o sea, **se ha «adelantado»** $\boldsymbol{n_0}$ **muestras**).

Obsérvese que ni «la forma» ni la ubicación vertical de las señales se ven alteradas, sino solo su ubicación horizontal (desplazamiento a lo largo del eje de abscisas). Asimismo, es importante notar que, debido a que la variable independiente representa el tiempo, moverse en su sentido positivo equivale a ir hacia el futuro, mientras que moverse en su sentido negativo equivale a ir hacia el pasado; por lo tanto:

- **Desplazar la señal en el sentido positivo** de la variable independiente (o sea, **moverla «hacia la derecha»**) es equivalente a **«enviarla hacia el futuro»**, y de ahí que se hable de **«atrasar la señal»** (puesto que la señal **«sucede más tarde»**).
- **Desplazar la señal en el sentido negativo** de la variable independiente (o sea, **«moverla hacia la izquierda»**) es equivalente a **«enviarla hacia el pasado»**, y de ahí que se hable de **«adelantar la señal»** (puesto que la señal **«sucede más pronto»**).

A continuación, se propone un ejercicio de representación gráfica de señales en el que el desplazamiento horizontal de señales se combina con otras transformaciones conocidas.

Ejemplo 6

Se pide representar gráficamente las siguientes señales:

$$x_1(t) = \frac{3}{1 + e^{-t+4}} - \frac{1}{2} \tag{60}$$

$$x_2[n] = 21 + 2n \tag{61}$$

Solución

Para una versión extendida y detallada del uso de MATLAB en la resolución de este ejercicio, se recomienda consultar el Anexo de este módulo.

a) Se observa que $x_1(t)$ no es sino el resultado de transformar la señal siguiente:

$$y_1(t) = \frac{1}{1+e^{-t}} \tag{62}$$

Concretamente, se observa que $x_1(t)$ es el resultado de aplicarle a $y_1(t)$, **en el orden que se indica a continuación**, las tres transformaciones siguientes:

1. Desplazamiento horizontal (la señal es atrasada 4 segs.): $y_1(t-4)$
2. Escalado en amplitud (la señal es amplificada en un factor 3): $3y_1(t-4)$
3. Desplazamiento vertical (se le resta $\frac{1}{2}$ al *offset* de la señal): $3y_1(t-4)-\frac{1}{2}$

Y, en efecto:

$$x_1(t) = 3y_1(t-4) - \frac{1}{2} = 3\left(\frac{1}{1+e^{-(t-4)}}\right) - \frac{1}{2} = \frac{3}{1+e^{-t+4}} - \frac{1}{2} \tag{63}$$

Obsérvese que, en este caso concreto, el desplazamiento horizontal puede hacerse en cualquier paso, ya que el escalado en amplitud y el desplazamiento vertical (cambios en el eje de ordenadas) no interfieren con la variable independiente (cambios en el eje de abscisas). Aun así, **es muy importante notar que, en general, el orden en el que se aplican las transformaciones es crucial**: no es lo mismo, por ejemplo, desplazar horizontalmente, luego escalar y luego desplazar verticalmente, que desplazar verticalmente, luego escalar y luego desplazar horizontalmente.

Por tanto, representar gráficamente $x_1(t)$ es exactamente lo mismo que representar gráficamente $3y_1(t-4)-\frac{1}{2}$. Vamos a dibujar dos gráficas en una misma figura:

- En la primera gráfica, representaremos simultáneamente $y_1(t)$ y $3y_1(t-4)-\frac{1}{2}$.
- En la segunda gráfica, representaremos simultáneamente $y_1(t)$ y $x_1(t)$.

Esto nos permitirá comprobar tanto si $x_1(t)$ es ciertamente el resultado de las transformaciones que hemos establecido o no, como si dichas transformaciones provocan ciertamente los efectos que se esperan de ellas.

En efecto, en la Figura 12 se observa que las señales representadas en rojo en ambas gráficas son exactamente iguales, lo cual nos confirma que $x_1(t) = 3y_1(t-4)-\frac{1}{2}$. Y además, también se observa, en cualquiera de las dos gráficas, que la señal roja es el resultado de atrasar la señal azul 4 segundos, y luego escalarla en factor 3, y luego restarle $\frac{1}{2}$ a su *offset*.

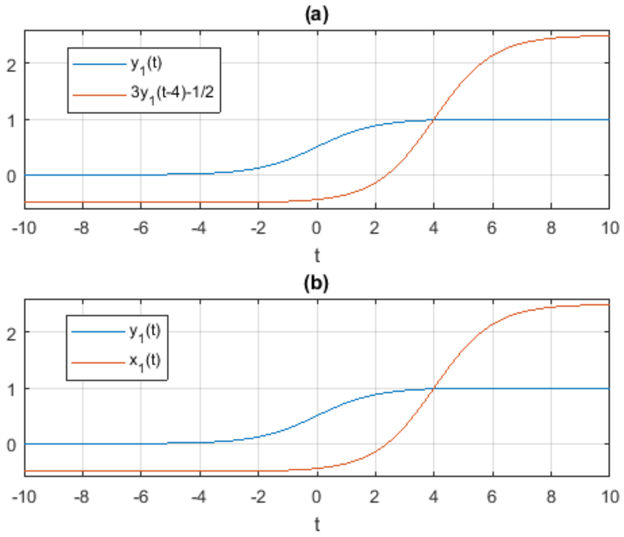

Figura 12. Representaciones gráficas de señales: (a) $y_1(t)$, $3y_1(t-4)-\frac{1}{2}$; (b) $y_1(t)$, $x_1(t)$.

b) En este caso, es conveniente trabajar ligeramente la expresión de $x_2[n]$:

$$x_2[n] = 21 + 2n = 1 + 2n + 20 = 1 + 2(n + 10) \tag{64}$$

Por tanto, vemos que $x_2[n]$ no es sino el resultado atrasar 10 muestras la siguiente señal en forma de recta discretizada:

$$\begin{gathered} y_2[n] = 1 + 2n \\ x_2[n] = y_2[n + 10] = 1 + 2(n + 10) = 21 + 2n \end{gathered} \tag{65}$$

Así, repetimos la misma estrategia que en el apartado anterior:

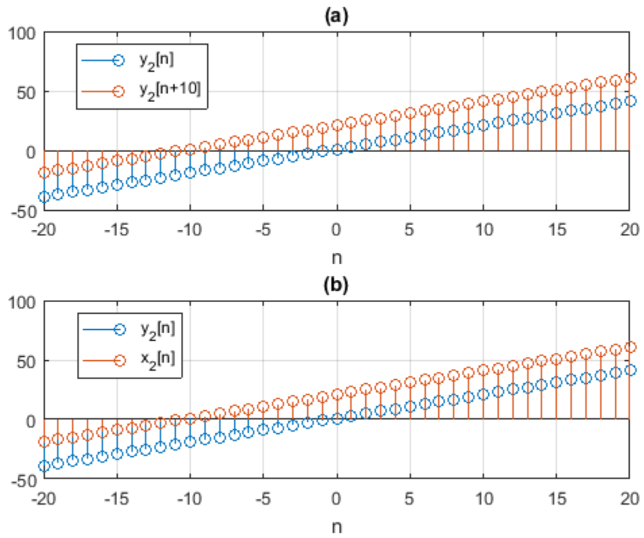

Figura 13. Representaciones gráficas de señales: (a) $y_2[n]$, $y_2[n+2]$; (b) $y_2[n]$, $x_2[n]$.

En efecto, si nos fijamos, por ejemplo, en el paso por 0 de las señales, se observa muy claramente que $x_2[n]$ es el resultado de atrasar $y_2[n]$ exactamente 10 muestras.

4.2. Reflexión horizontal

Cambiar el signo de la variable independiente de una señal es una transformación muy habitual en la práctica que consiste en que, **para cada valor de la variable independiente y su opuesto, sus valores de amplitud correspondientes se intercambian entre sí**[15]:

$$y(t) = x(-t) \iff y(t_i) = x(-t_i)\,, \forall t_i \in \mathbb{R} \tag{66}$$

$$y[n] = x[-n] \iff y[n_i] = x[-n_i]\,, \forall n_i \in \mathbb{Z} \tag{67}$$

En términos de representación gráfica, el resultado de esta transformación de la variable independiente en **señales reales** consiste en una **reflexión horizontal de la señal**, de modo tal que **«la forma» de la señal «rota 180°» respecto del eje de ordenadas**[16].

Pormenorizadamente, los efectos asociados a las transformaciones definidas en las ecuaciones (66) y (67) son los siguientes:

- Si $\boldsymbol{y(t) = x(-t)}$, entonces $\boldsymbol{y(t)}$ **es igual a** $\boldsymbol{x(t)}$ **«rotada 180°» respecto del eje de ordenadas**; por ejemplo, para $t = 2$ y $t = -2$, donde antes de la transformación estaban $x(2)$ y $x(-2)$, respectivamente, ahora están $y(2) = x(-2)$ y $y(-2) = x(2)$, respectivamente: los valores de amplitud $x(2)$ y $x(-2)$ **han intercambiado sus posiciones entre sí**.
- Si $\boldsymbol{y[n] = x[-n]}$, entonces $\boldsymbol{y[n]}$ **es igual a** $\boldsymbol{x[n]}$ **«rotada 180°» respecto del eje de ordenadas**; por ejemplo, para $n = 2$ y $n = -2$, donde antes de la transformación estaban $x[2]$ y $x[-2]$, respectivamente, ahora están $y[2] = x[-2]$ y $y[-2] = x[2]$, respectivamente: los valores de amplitud $x[2]$ y $x[-2]$ **han intercambiado sus posiciones entre sí**.

En la Figura 14 se ilustran estos efectos: se produce un intercambio de los instantes positivos y los negativos de la variable independiente (rotación de 180° de las señales respecto del eje de ordenadas).

---

[15] La ecuación (66) se puede generalizar fácilmente al caso de una señal analógica de variable compleja haciendo $y(s) = x(-s) \iff y(s_i) = x(-s_i)\,, \forall s_i \in \mathbb{C}$.

[16] De nuevo, la «reflexión horizontal» o «rotación de 180°» respecto del eje de ordenadas puede entenderse también como un «efecto espejo» o «*flip*» sobre el eje de ordenadas.

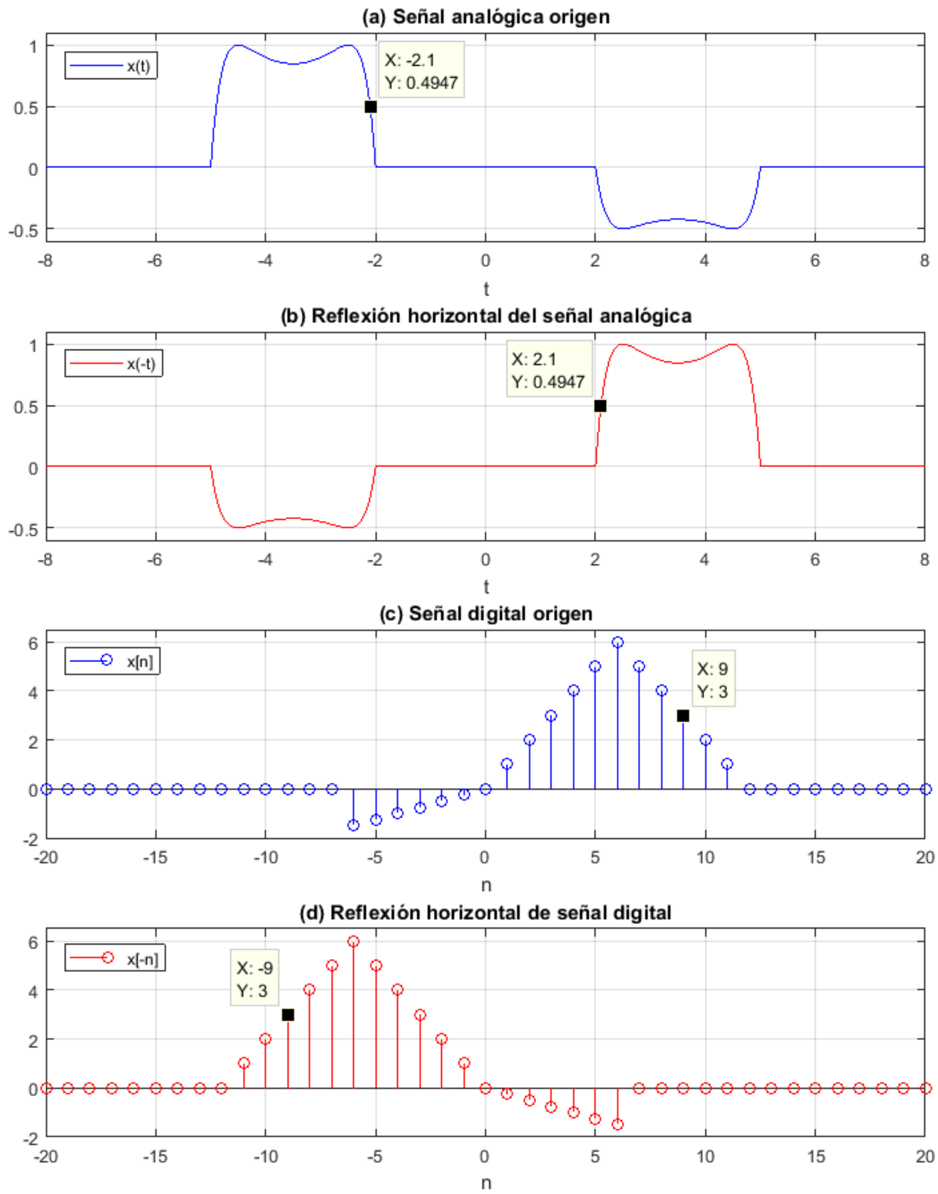

Figura 14. Ejemplos de reflexión horizontal de señales reales.

Es importante notar que, debido a que la variable independiente representa el tiempo, **si tomamos $t = 0$ y $n = 0$ como el instante presente**, intercambiar los instantes positivos y los negativos de la variable independiente equivale a **sustituir aquello que sucederá en la señal dentro de un cierto tiempo ($x(t_i)$, $x[n_i]$) por aquello que sucedió en la señal hace exactamente ese mismo tiempo ($x(-t_i)$, $x[-n_i]$), y viceversa**.

Asimismo, es también interesante darse cuenta de que hay señales que son «insensibles a la reflexión horizontal». Se trata de **señales cuya reflexión horizontal sobre el eje de ordenadas no supone transformación alguna**, o, dicho de otro modo, señales que son iguales a ellas mismas reflejadas horizontalmente ($x(t) = x(-t)$ y $x[n] = x[-n]$). En concreto, se dice de las señales de este tipo que son **señales pares** (o **señales de simetría par**). Para más detalles sobre esta cuestión, consultar el apartado 5.5 de este mismo módulo.

A continuación, se propone un ejercicio de representación gráfica de señales en el que la reflexión horizontal de señales se combina con otras transformaciones conocidas.

Ejemplo 7

Se pide representar gráficamente las siguientes señales:

$$x_1(t) = \frac{3}{1+e^{-t+4}} - \frac{1}{2} \tag{68}$$

$$x_2[n] = -1 - n - n^2 - n^3 \tag{69}$$

Solución

Para una versión extendida y detallada del uso de MATLAB en la resolución de este ejercicio, se recomienda consultar el Anexo de este módulo.

a) Se observa que $x_1(t)$ no es sino el resultado de transformar la señal siguiente:

$$y_1(t) = \frac{1}{1+e^{t}} \tag{70}$$

Concretamente, se observa que $x_1(t)$ es el resultado de aplicarle a $y_1(t)$, **en el orden que se indica a continuación**, las cuatro transformaciones siguientes:

1. Desplazamiento horizontal (la señal es adelantada 4 segs.): $y_1(t+4)$
2. Reflexión horizontal: $y_1(-t+4)$
3. Escalado en amplitud (la señal es amplificada en un factor 3): $3y_1(-t+4)$
4. Desplazamiento vertical (se le resta $\frac{1}{2}$ al *offset* de la señal): $3y_1(-t+4)-\frac{1}{2}$

Y, en efecto:

$$x_1(t) = 3y_1(-t+4) - \frac{1}{2} = 3\left(\frac{1}{1+e^{(-t+4)}}\right) - \frac{1}{2} = \frac{3}{1+e^{-t+4}} - \frac{1}{2} \tag{71}$$

Como en el Ejemplo 6 (y como siempre, de hecho), el orden en el que se aplican las transformaciones es crucial: no es lo mismo, por ejemplo, aplicar la reflexión horizontal primero y adelantar la señal después. En ese caso, se obtiene una señal diferente a $x_1(t)$:

1. Reflexión horizontal: $y_1(-t)$
2. Desplazamiento horizontal (la señal se adelanta 4 segs.): $y_1\big(-(t+4)\big) = y_1(-t-4)$
3. Escalado en amplitud (la señal es amplificada en un factor 3): $3y_1(-t-4)$
4. Desplazamiento vertical (se le resta $\frac{1}{2}$ al *offset* de la señal): $3y_1(-t-4)-\frac{1}{2}$

$$3y_1(-t-4) - \frac{1}{2} = 3\left(\frac{1}{1+e^{(-t-4)}}\right) - \frac{1}{2} = \frac{3}{1+e^{-t-4}} - \frac{1}{2} \neq x_1(t) \tag{72}$$

Si queremos obtener $x_1(t)$ aplicando primero la reflexión horizontal, después tenemos que atrasar la señal (en lugar de adelantarla) 4 segundos:

1. Reflexión horizontal: $y_1(-t)$
2. Desplazamiento horizontal (la señal **se atrasa** 4 segs.): $y_1\big(-(t-4)\big) = y_1(-t+4)$
3. Escalado en amplitud (la señal es amplificada en un factor 3): $3y_1(-t+4)$
4. Desplazamiento vertical (se le resta $\frac{1}{2}$ al *offset* de la señal): $3y_1(-t+4)-\frac{1}{2}$

$$3y_1(-t+4) - \frac{1}{2} = \frac{3}{1+e^{-t+4}} - \frac{1}{2} = x_1(t) \tag{73}$$

Y, ahora, respecto de la representación gráfica de las señales, repetimos la misma estrategia que en el Ejemplo 6 a fin de confirmar que nuestro planteamiento es correcto. Además, en la primera gráfica también representaremos la señal de la ecuación (72), para ilustrar cómo cambia la representación gráfica al cambiar el orden en que se aplican las transformaciones:

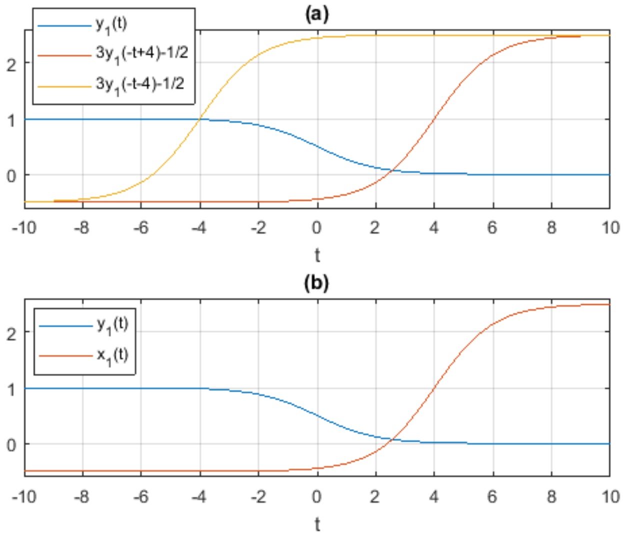

Figura 15. Representaciones gráficas: (a) $y_1(t), 3y_1(-t+4)-\frac{1}{2}, 3y_1(-t-4)-\frac{1}{2}$; (b) $y_1(t), x_1(t)$.

En efecto, se observa que las señales representadas en rojo en ambas gráficas son exactamente iguales, lo cual nos confirma que $x_1(t) = 3y_1(-t+4) - \frac{1}{2}$.

b) En el caso de $x_2[n]$, se observa lo siguiente:

$$x_2[n] = -1 - n - n^2 - n^3 = -1 + (-n) - (-n)^2 + (-n)^3 \tag{74}$$

Por tanto, vemos que $x_2[n]$ no es sino el resultado de la reflexión horizontal de la siguiente señal:

$$\begin{gathered} y_2[n] = -1 + n - n^2 + n^3 \\ x_2[n] = y_2[-n] = -1 + (-n) - (-n)^2 + (-n)^3 = -1 - n - n^2 - n^3 \end{gathered} \tag{75}$$

Y, análogamente, volvemos a representar gráficamente los dos pares de señales:

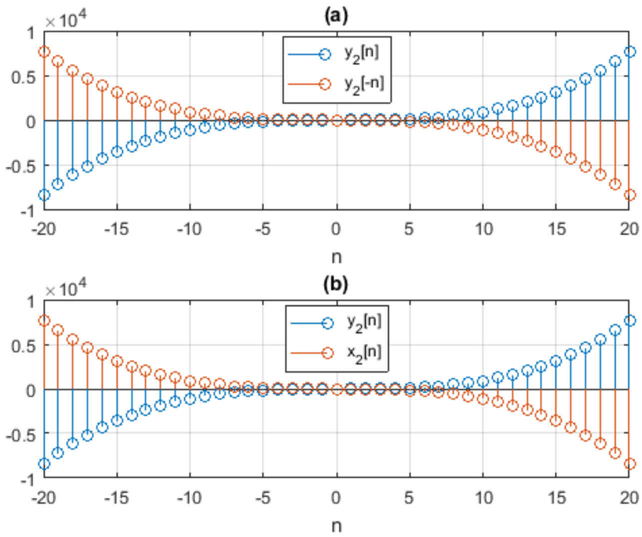

Figura 16. Representaciones gráficas: (a) $y_2[n], y_2[-n]$; (b) $y_2[n], x_2[n]$.

En efecto, vemos que las señales representadas en rojo en ambas gráficas son exactamente iguales, lo cual nos confirma que $x_2[n] = y_2[-n]$.

4.3. Escalado de la variable independiente

El **multiplicar la variable independiente de una señal por una constante** (es decir, **escalar la variable independiente**) es una transformación muy habitual en la práctica que consiste en lo siguiente[17]:

$$y(t) = x(at) \iff y(t_i) = x(at_i)\,, \forall t_i \in \mathbb{R} \qquad (76)$$

$$y[n] = x[bn] \iff y[n_i] = x[bn_i]\,, \forall n_i \in \mathbb{Z} \qquad (77)$$

allí donde $\boldsymbol{a}$ **es real** (**$\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$**) y $\boldsymbol{b}$ **es racional** (**$\boldsymbol{b} \in \mathbb{Q}$**), siendo ambas **constantes positivas** (**$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} > 0$**).

En primer lugar, es importante notar que a y b se definen como constantes positivas debido a que **lo que sucede si $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son negativas es que se le están aplicando a la variable independiente dos transformaciones diferentes ya conocidas**:

- Se multiplica la variable independiente por el valor absoluto de la constante; es decir, se escala la variable independiente multiplicándola por una constante positiva, tal y como lo acabamos de definir en las ecuaciones (76) y (77):

$$\begin{aligned} y_1(t) &= x(|a|t) \\ y_1[n] &= x[|b|n] \end{aligned} \qquad (78)$$

- Se cambia el signo de la variable independiente; es decir, se le aplica una reflexión horizontal, tal y como hemos visto en el apartado 4.2:

$$\begin{aligned} y(t) &= y_1(-t) = x\big(|a|(-t)\big) = x(-|a|t) = x(at) \\ y[n] &= y_1[-n] = x[|b|(-n)] = x[-|b|n] = x[bn] \end{aligned} \qquad (79)$$

  con $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{Q}$, siendo $a, b < 0$.

Además, se observa que, **en este caso, el orden en que se apliquen ambas transformaciones es irrelevante**:

$$\begin{aligned} &\text{Si } y_1(t) = x(-t), \text{ entonces } y(t) = y_1(|a|t) = x\big(-(|a|t)\big) = x(-|a|t) = x(at) \\ &\text{Si } y_1[n] = x[-n], \text{ entonces } y[n] = y_1[|b|n] = x[-(|b|n)] = x[-|b|n] = x[bn] \end{aligned} \qquad (80)$$

Y, en segundo lugar, a diferencia de lo que sucede con la suma/resta de una constante o con el cambio de signo, **el escalado de la variable independiente provoca efectos diferentes en las señales dependiendo de si se trata de señales analógicas o digitales**:

---

[17] La ecuación (76) se puede generalizar fácilmente al caso de una señal analógica de variable compleja haciendo $y(s) = x(as) \implies y(s_i) = x(as_i)\,, \forall s_i \in \mathbb{C}$, allí donde $a \in \mathbb{C}$.

- Escalar la variable independiente de una **señal analógica** provoca o bien su **compresión horizontal**, o bien su **expansión horizontal**.
- Escalar la variable independiente de una **señal digital** provoca o bien el **diezmo** de la señal, o bien la **inserción de ceros** entre las muestras de señal.

A continuación, se estudian ambos casos por separado.

4.3.1. Señales analógicas: compresión y expansión horizontales

En su representación gráfica, el efecto de multiplicar por una constante real positiva la variable independiente de **señales analógicas reales** depende del valor de la constante:

- Si $\mathbf{0 < a < 1}$, entonces **la señal se expande horizontalmente**; es decir, «la forma» de la señal **«se dilata»** desde el eje de ordenadas ($t = 0$) y hacia $t \to -\infty$ y $t \to +\infty$.
- Si $\boldsymbol{a \geq 1}$, entonces **la señal se comprime horizontalmente**; es decir, «la forma» de la señal **«se contrae»** desde $t \to -\infty$ y $t \to +\infty$ y hacia el eje de ordenadas ($t = 0$).

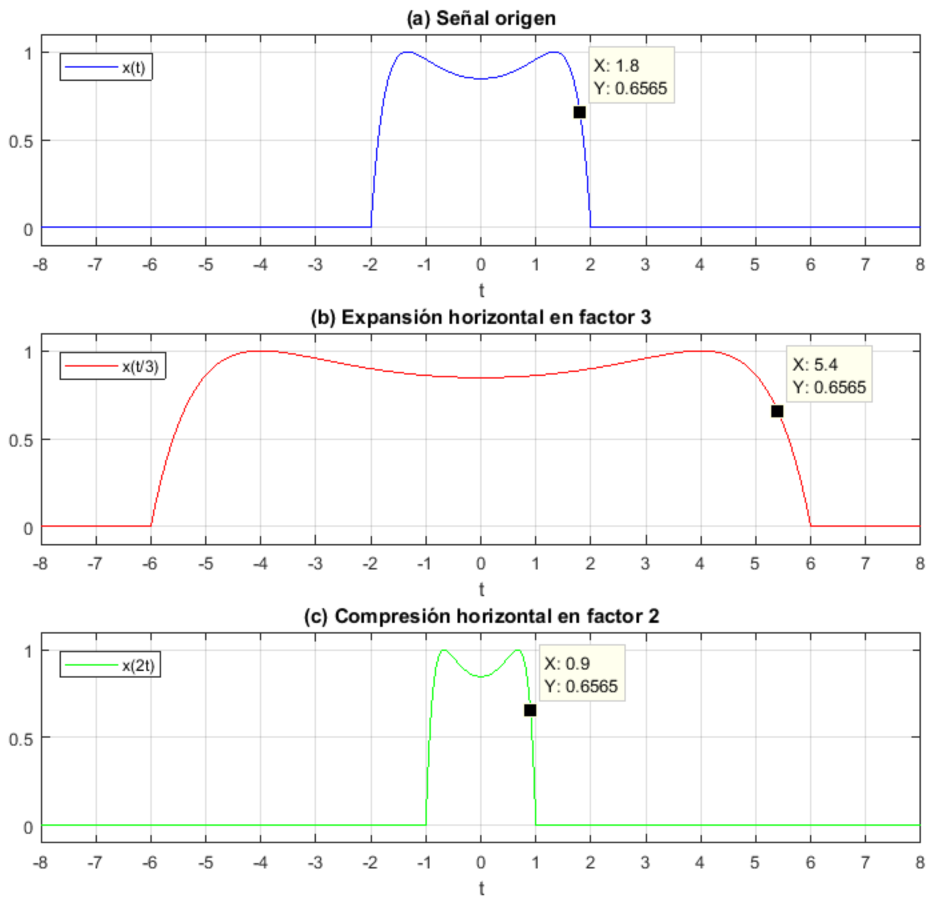

Figura 17. Ejemplos de compresión y expansión horizontal en señales analógicas reales.

En la Figura 17 se ilustran pormenorizadamente estos efectos:

- Si, por ejemplo, $y(t) = x(at)$ con $a = 1/3$, lo que sucede es lo siguiente: donde antes de la transformación estaba $x(0)$, ahora está $y(0) = x(0/3) = x(0)$; donde estaba $x(1)$, ahora está $y(1) = x(1/3)$; donde estaba $x(2)$, ahora está $y(2) = x(2/3)$; donde estaba $x(3)$, ahora está $y(3) = x(3/3) = x(1)$; y así para todo valor de t. Es decir, **la señal se ha «dilatado» horizontalmente en un factor $\mathbf{1/a}$** (o sea, en un factor 3: ahora todo ocupa el triple de tiempo).
- Si, por ejemplo, $y(t) = x(at)$ con $a = 2$, lo que sucede es lo siguiente: donde antes de la transformación estaba $x(0)$, ahora está $y(0) = x(2 \cdot 0) = x(0)$; donde estaba $x(1)$, ahora está $y(1) = x(2 \cdot 1) = x(2)$; donde estaba $x(2)$, ahora está $y(2) = x(2 \cdot 2) = x(4)$; donde estaba $x(3)$, ahora está $y(3) = x(2 \cdot 3) = x(6)$; y así para todo valor de t. Es decir, **la señal se ha «contraído» horizontalmente en un factor $\boldsymbol{a}$** (o sea, en un factor 2: ahora todo ocupa la mitad de tiempo).

Obsérvese que las señales se expanden y se contraen alrededor del eje de ordenadas. Un símil nemotécnico que puede servir aquí es el del acordeón: el efecto es como el de coger la señal con ambas manos desde $t \to -\infty$ y $t \to +\infty$ y contraerla y estirarla como si fuera un acordeón alrededor de $t = 0$.

Es importante notar que, debido a que la variable independiente representa el tiempo, escalar la variable independiente implica modificar la duración temporal de la información contenida en la señal:

- **Expandir horizontalmente la señal** es equivalente a **«que las cosas duren más»**, o sea, a que la información contenida en la señal se alargue en el tiempo.
- **Comprimir horizontalmente la señal** es equivalente a **«que las cosas duren menos»**, o sea, a que la información contenida en la señal se acorte en el tiempo.

A continuación, se propone un ejercicio de representación gráfica de señales en el que la compresión y la expansión horizontal de señales analógicas se combinan con otras transformaciones conocidas.

Ejemplo 8

Se pide representar gráficamente las siguientes señales analógicas:

$$x_1(t) = \frac{1}{1 + e^{-\frac{2t+8}{3}}} \tag{81}$$

$$x_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad t < 3/10 \\ 1 - e^{-10t+3} & \text{para} \quad t \geq 3/10 \end{cases} \tag{82}$$

Solución

Para una versión extendida y detallada del uso de MATLAB en la resolución de este ejercicio, se recomienda consultar el Anexo de este módulo.

a) Se observa que $x_1(t)$ es el resultado de transformar la señal:

$$y_1(t) = \frac{1}{1 + e^{t}} \tag{83}$$

En concreto, aplicándole las tres transformaciones siguientes:

1. Reflexión horizontal: $y_1(-t)$
2. Expansión horizontal: $y_1\left(-\left(\frac{2}{3}t\right)\right) = y_1\left(-\frac{2}{3}t\right)$
3. Desplazamiento horizontal (se adelanta 4 segs.): $y_1\left(-\frac{2}{3}(t+4)\right) = y_1\left(-\frac{2}{3}t-\frac{8}{3}\right)$

Y, en efecto:

$$x_1(t) = y_1\left(-\frac{2}{3}t-\frac{8}{3}\right) = \frac{1}{1+e^{\left(-\frac{2}{3}t-\frac{8}{3}\right)}} = \frac{1}{1+e^{-\frac{2t+8}{3}}} \quad (84)$$

Como siempre, **el orden de aplicación de las transformaciones es muy importante**: la que hemos propuesto aquí no es la única secuencia posible de transformaciones que funcionaría en este caso. Se deja propuesto como ejercicio el buscar otras secuencias de transformaciones posibles y el comprobar que, efectivamente, también funcionan.

Como en el Ejemplo 6 y el Ejemplo 7, representaremos gráficamente los dos pares de señales para comprobar si nuestro planteamiento es correcto:

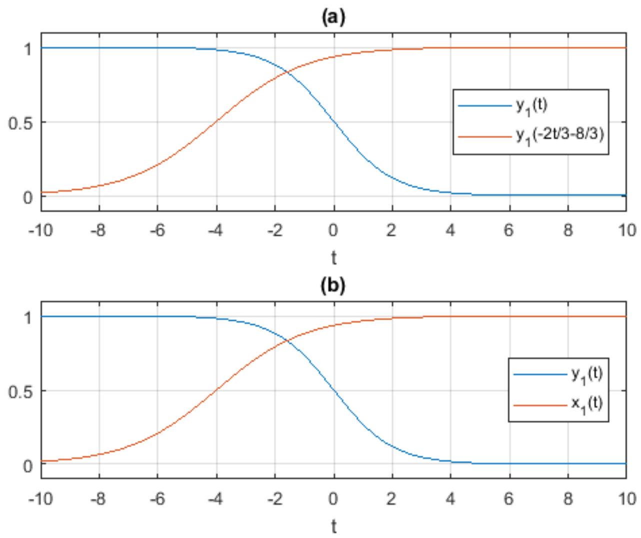

Figura 18. Representaciones gráficas de señales: (a) $y_1(t)$, $y_1\left(-\frac{2}{3}t-\frac{8}{3}\right)$; (b) $y_1(t)$, $x_1(t)$.

En efecto, se observa que las señales representadas en rojo en ambas gráficas son exactamente iguales, lo cual nos confirma que $x_1(t) = y_1\left(-\frac{2}{3}t-\frac{8}{3}\right)$. Y además, también se observa, en cualquiera de las dos gráficas, que la señal roja es el resultado de aplicarle una reflexión horizontal a la señal azul, luego expandirla horizontalmente, y luego adelantarla 4 segundos.

b) En general, puede suceder que, dependiendo de qué señal origen se escoja, haya que aplicar más o menos transformaciones para obtener la señal deseada. El caso de $x_2(t)$ es un buen ejemplo de ello. Aquí vamos a escoger la siguiente señal origen:

$$y_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad t < 0 \\ 1-e^{-t} & \text{para} \quad t \geq 0 \end{cases} \quad (85)$$

Así, $x_2(t)$ es el resultado de aplicarle a $y_2(t)$ las dos transformaciones siguientes:

1. Desplazamiento horizontal (la atrasamos 3 segs.): $y_2(t-3)$

2. Compresión horizontal: $y_2\big((10t) - 3\big) = y_2(10t - 3)$

Y, en efecto:

$$x_2(t) = y_2(10t-3) = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad (10t-3) < 0 \\ 1 - e^{-(10t-3)} & \text{para} \quad (10t-3) \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad 10t < 3 \\ 1 - e^{-10t+3} & \text{para} \quad 10t \geq 3 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad t < 3/10 \\ 1 - e^{-10t+3} & \text{para} \quad t \geq 3/10 \end{cases} \tag{86}$$

Conviene notar que, **al aplicar transformaciones de la variable independiente en señales definidas por intervalos, las transformaciones afectan tanto a las expresiones de las señales correspondientes a cada intervalo como a las definiciones de los intervalos mismos**.

Se deja propuesto como ejercicio el plantear qué otras secuencias de transformaciones habría que aplicar para obtener $x_2(t)$ a partir de otras señales origen diferentes a $y_2(t)$, tales como, por ejemplo:

$$y_3(t) = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad t < 0 \\ e^t & \text{para} \quad t \geq 0 \end{cases} \tag{87}$$

Así pues, comprobamos los resultados representando las gráficas como en el apartado anterior:

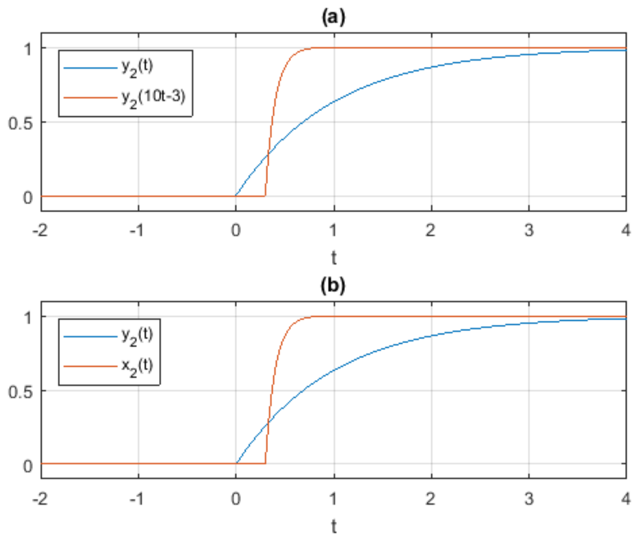

Figura 19. Representaciones gráficas de señales: (a) $y_2(t)$, $y_2(10t-3)$; (b) $y_2(t)$, $x_2(t)$.

Se observa que, efectivamente, $x_2(t) = y_2(10t-3)$: al empezar atrasando $y_2(t)$ 3 segundos, la frontera entre los dos intervalos se mueve de $t = 0$ a $t = 3$; pero, al aplicar después la compresión horizontal en factor 10, vuelve a moverse de $t = 3$ a $t = 3/10$, que es donde está la frontera entre intervalos en la definición de $x_2(t)$.

4.3.2. Señales digitales: diezmo e inserción de ceros

Antes de describir los efectos del escalado de la variable independiente en las señales digitales, hay que tener en consideración algunas cuestiones.

En primer lugar, en la ecuación (77), el factor de escalado se define como una constante **racional** positiva ($b \in \mathbb{Q}$) debido a que, como sabemos, la variable independiente de una señal digital es la variable entera ($x[n]$, con $n \in \mathbb{Z}$). Definiendo $b \in \mathbb{R}$, permitiríamos que b pudiese adoptar valores irracionales (por ejemplo: $b = \sqrt{2}$), lo cual no es un problema si la variable independiente es real (o compleja), pero sí lo es cuando la variable es entera, puesto que bn jamás adoptaría un valor entero en $x[bn]$. ¿Cómo indexar, por ejemplo, las muestras de $x[\sqrt{2}n]$ ($x[-\sqrt{2}]$, $x[\sqrt{2}]$, $x[2\sqrt{2}]$...)? No es posible, porque **esas muestras no existen en $\boldsymbol{x[n]}$**.

Y, en segundo lugar, aunque definamos $b \in \mathbb{Q}$, sí estamos permitiendo que b pueda adoptar valores no enteros. En general, al ser definido como un valor **racional positivo**, el factor de escalado es de la forma $\boldsymbol{b = M/L}$, con $\boldsymbol{M, L} \in \mathbb{Z}$ y siendo $\boldsymbol{M, L > 0}$. Por tanto, **$\boldsymbol{bn}$ solo adoptará valores enteros en $\boldsymbol{x[bn]}$ para aquellos valores de $\boldsymbol{n}$ que sean múltiplos enteros de $\boldsymbol{L}$ ($\boldsymbol{n_i = m_i L, \forall m_i} \in \mathbb{Z}$)**. Por ejemplo: si $b = 1/2$, indexar $x[n/2]$ no supone ningún problema para valores pares de n ($x[-4]$, $x[-2]$, $x[0]$, $x[2]$, $x[4]$...), pero, como antes, ahora tampoco podemos indexar $x[n/2]$ para valores impares de n ($x[-3/2]$, $x[-1/2]$, $x[1/2]$, $x[3/2]$...). Entonces, **¿qué valor adoptan las muestras de $\boldsymbol{x[bn]}$, con $\boldsymbol{b} \in \mathbb{Q}$ y $\boldsymbol{b > 0}$, para valores no enteros de $\boldsymbol{bn}$ ($\boldsymbol{bn_i} \notin \mathbb{Z}$), siendo que son muestras que no existen en $\boldsymbol{x[n]}$?** Puesto que no están en ninguna parte, **son definidas como muestras de valor $\boldsymbol{0}$**.

Es importante observar que definir estas muestras como ceros (o como lo que sea) sí tiene sentido cuando b es racional, puesto que en ese caso sí se indexan algunas de las muestras de $x[n]$ (en el ejemplo con $b = 1/2$, las muestras pares). Pero no tendría sentido hacerlo si b fuese irracional, puesto que, de hacerlo, siempre sucedería que $x[bn] = 0$.

Y ahora ya estamos en condiciones de, a partir de la ecuación (77), definir lo siguiente:

El efecto de multiplicar por una constante racional positiva ($\boldsymbol{b = M/L}$, siendo $\boldsymbol{M, L} \in \mathbb{Z}$ y $\boldsymbol{M, L > 0}$) la variable independiente de **señales digitales** depende del valor que adopte la constante:

- Si $\boldsymbol{b = 1/L}$ (o sea, si $\boldsymbol{M = 1}$), entonces **la señal «se expande» horizontalmente en un factor $\boldsymbol{L}$**, de modo que **las muestras que no son múltiplos de $\boldsymbol{L}$ valen $\boldsymbol{0}$**:

$$y[n] = x[n/L] = \begin{cases} x[n/L] & \text{para} \quad n \in \{m_i L\}, \forall m_i \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{para} \quad n \notin \{m_i L\}, \forall m_i \in \mathbb{Z} \end{cases} \tag{88}$$

  Es decir, se produce la **inserción de bloques de $\boldsymbol{L-1}$ muestras de valor $\boldsymbol{0}$ entre las muestras pertenecientes a $\boldsymbol{x[n]}$**.
- Si $\boldsymbol{b = M}$ (o sea, si $\boldsymbol{L = 1}$), entonces **la señal «se comprime» horizontalmente en un factor $\boldsymbol{M}$**, de modo tal que **la señal es diezmada**:

$$y[n] = x[Mn] \tag{89}$$

  Es decir, que **las muestras de $\boldsymbol{x[n]}$ que no son múltiplos de $\boldsymbol{M}$ son eliminadas**, puesto que no son indexadas.
- Si $\boldsymbol{b = M/L}$ (o sea, si $\boldsymbol{M/L} \notin \mathbb{Z}$ con $\boldsymbol{M, L \neq 1}$), entonces **se dan ambos efectos de modo sucesivo**: la señal sufre un **diezmo en factor $\boldsymbol{M}$** y, a continuación, una **expansión horizontal en factor $\boldsymbol{L}$**.

$$y[n] = x[(M/L)n] = \begin{cases} x[(M/L)n] & \text{para} \quad n \in \{m_i L\}, \forall m_i \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{para} \quad n \notin \{m_i L\}, \forall m_i \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (90)$$

Es decir, que **las muestras de $x[n]$ que no son múltiplos de M son eliminadas** y, a continuación, se produce la **inserción de bloques de $L-1$ ceros entre las muestras no eliminadas de $x[n]$** (es decir, **entre las muestras de $x[Mn]$**).

Es importante notar que, en el tercer caso ($b = M/L$), **el orden de aplicación de ambas transformaciones es irrelevante**; es decir, que **la señal resultante es la misma tanto si primero se diezma y luego se insieren los ceros, como si primero se insieren ceros y luego se diezma**. En la Figura 20 se ilustran los tres efectos aquí descritos mediante la representación gráfica de señales digitales reales:

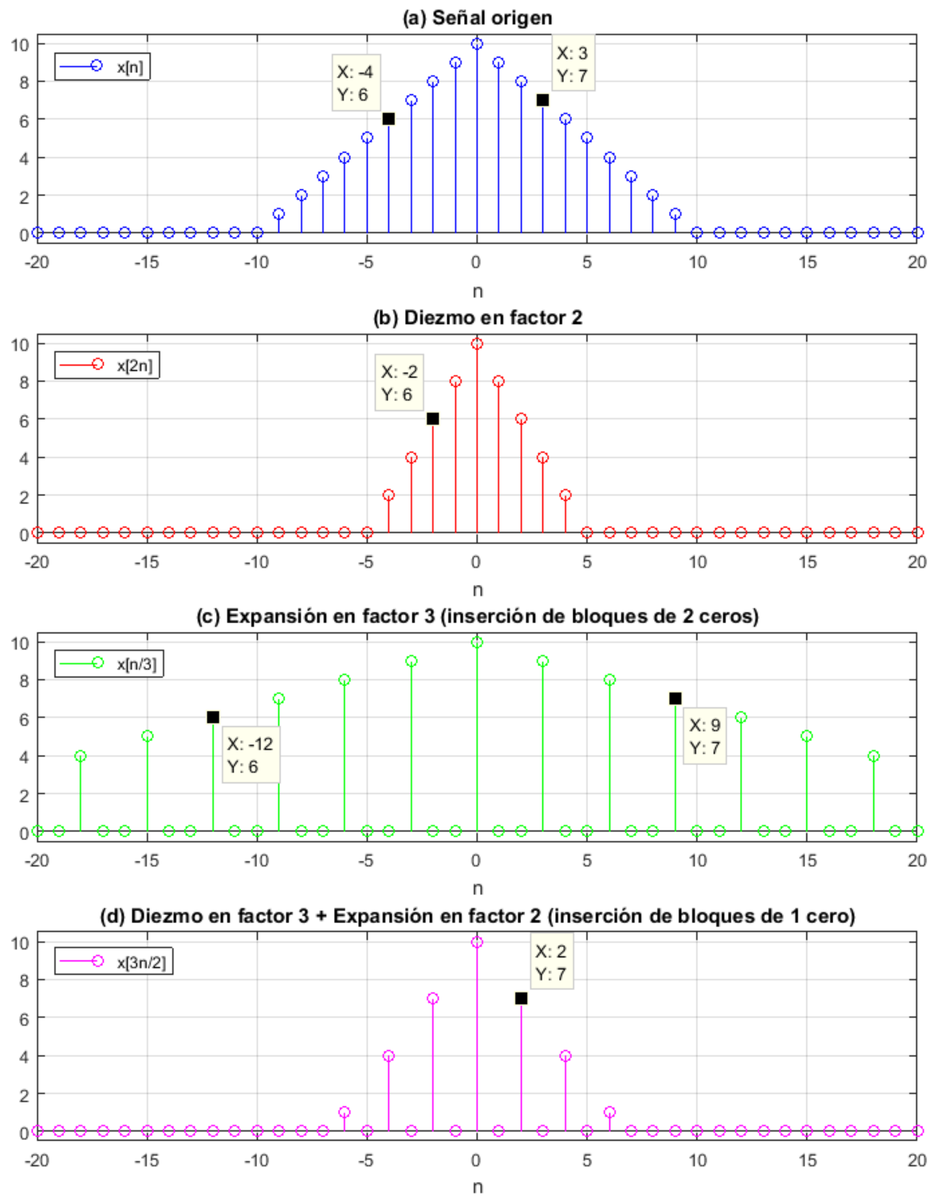

Figura 20. Ejemplos de diezmo y expansión horizontal (inserción de bloques de ceros) en señales digitales reales. (a) Más allá de los límites de representación de la gráfica, la señal origen vale 0 (o sea: $x[n] = 0$ para $|n| > 20$). (c) Más allá de los límites de representación de la gráfica, hay muestras de $x[n/3]$ diferentes de 0.

En general, el diezmo y la inserción de bloques de ceros son transformaciones de gran importancia en la teoría de señales y sistemas digitales. Trabajaremos mucho con ellas en módulos posteriores, al estudiar cómo modificar la frecuencia de muestreo de una señal digital (*resampling*).

A continuación, se propone un ejercicio en el que se trabaja con estas dos transformaciones.

Ejemplo 9

Se tiene la siguiente señal digital definida mediante una función trigonométrica:

$$x[n] = \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) \tag{91}$$

Se pide hallar las expresiones de las siguientes señales y representarlas todas gráficamente:

$$y_1[n] = x[2n] \tag{92}$$

$$y_2[n] = x[4n] \tag{93}$$

$$y_3[n] = x[n/2] \tag{94}$$

$$y_4[n] = x[2n/3] \tag{95}$$

Solución

Para una versión extendida y detallada del uso de MATLAB en la resolución de este ejercicio, se recomienda consultar el Anexo de este módulo.

En primer lugar, hallamos las expresiones de las señales $y_1[n]$, $y_2[n]$, $y_3[n]$ e $y_4[n]$, aplicando para ello las nociones de diezmo y de inserción de ceros según las hemos definido en las ecuaciones (88), (89) y (90), según corresponda en cada caso.

En el caso de $y_1[n]$, vemos que es el resultado de diezmar $x[n]$ en factor 2:

$$y_1[n] = x[2n] = \cos\left(\frac{\pi}{2}(2n)\right) = \cos(\pi n) = (-1)^n \tag{96}$$

En lo referente a $y_2[n]$, se define a partir del diezmo de $x[n]$ en factor 4:

$$y_2[n] = x[4n] = \cos\left(\frac{\pi}{2}(4n)\right) = \cos(2\pi n) = 1 \tag{97}$$

Por el contrario, $y_3[n]$ es la expansión horizontal en factor 2 de $x[n]$, lo que requiere de inserir 1 cero entre cada par de muestras consecutivas de $x[n]$:

$$y_3[n] = x[n/2] = \begin{cases} x[n/2] & \text{para } n \in \{2m_i\}, \forall m_i \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{para } n \notin \{2m_i\}, \forall m_i \in \mathbb{Z} \end{cases} = \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{n}{2}\right)\right) & \text{si } n \text{ par} \\ 0 & \text{si } n \text{ impar} \end{cases} = \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) & \text{si } n \text{ par} \\ 0 & \text{si } n \text{ impar} \end{cases} \tag{98}$$

Finalmente, $y_4[n]$ es el resultado de diezmar $x[n]$ en factor 2 y expandirla horizontalmente en factor 3 (inserción de bloques de 2 ceros entre cada par de muestras consecutivas de $x[2n]$):

$$y_4[n] = x[2n/3] = \begin{cases} x[2n/3] & \text{para } \ n \in \{3m_i\}, \forall m_i \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{para } \ n \notin \{3m_i\}, \forall m_i \in \mathbb{Z} \end{cases} =$$

$$\begin{cases} \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\left(\dfrac{2n}{3}\right)\right) & \text{si } n \text{ múltiplo de } 3 \\ 0 & \text{si } n \text{ no múltiplo de } 3 \end{cases} = \begin{cases} \cos\left(\dfrac{\pi}{3}n\right) & \text{si } n \text{ múltiplo de } 3 \\ 0 & \text{si } n \text{ no múltiplo de } 3 \end{cases} \tag{99}$$

Y, ahora, representamos gráficamente $x[n]$, $y_1[n]$, $y_2[n]$, $y_3[n]$ e $y_4[n]$ (ver Figura 21):

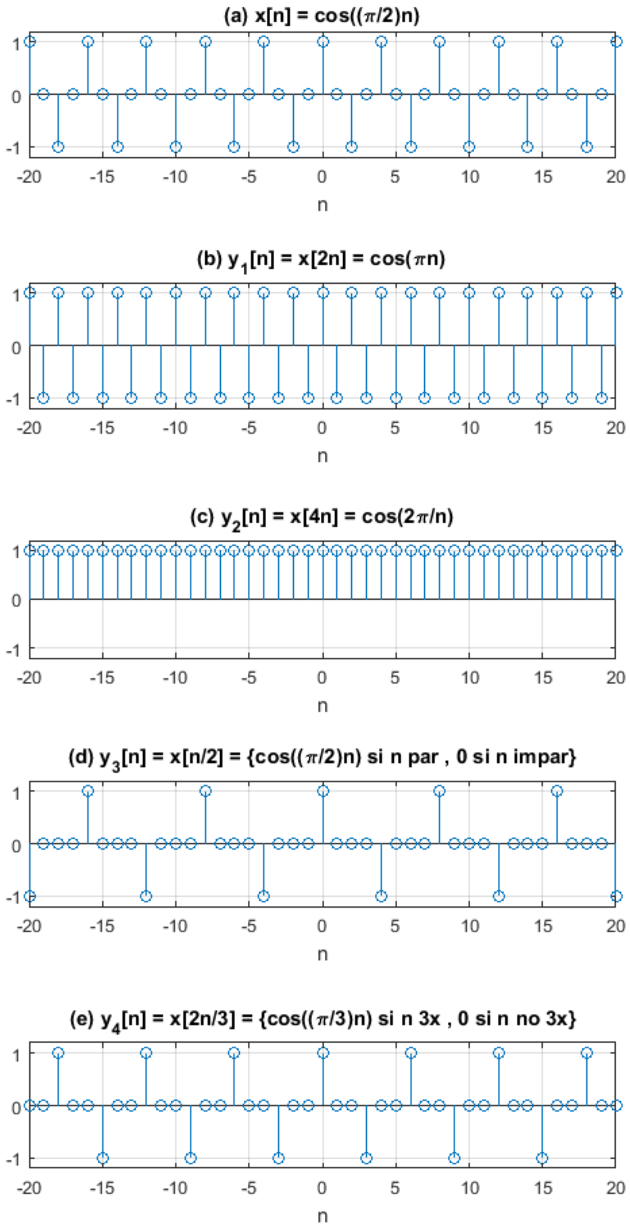

Figura 21. Representación gráfica de $x[n]$, $y_1[n]$, $y_2[n]$, $y_3[n]$ e $y_4[n]$.

Si nos fijamos en la Figura 21, se observa lo siguiente:

- La señal $x[n]$ es una señal periódica a razón de 4 muestras por periodo, tal que sus muestras dan lugar a la secuencia $[\cdots 1 \ \ 0 \ \ -1 \ \ 0 \ \ 1 \ \ 0 \ \ -1 \ \ 0 \ \ 1 \ \ 0 \ \ -1 \ \ 0 \cdots]$.
- La señal $y_1[n]$ es una señal periódica a razón de 2 muestras por periodo, tal que $[\cdots 1 \ \ -1 \ \ 1 \ \ -1 \ \ 1 \ \ -1 \ \ 1 \ \ -1 \ \ 1 \ \ -1 \ \ 1 \ \ -1 \cdots]$. Por tanto, vemos que es correcto que $\cos(\pi n) = (-1)^n$, tal y como se expresa en la ecuación (96).

- La señal $y_2[n]$ es la señal constante $[\cdots 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1 \cdots]$. Por tanto, vemos que es correcto que $\cos(2\pi n) = 1$, tal y como se expresa en la ecuación (97).
- La señal $y_3[n]$ es una señal periódica a razón de 8 muestras por periodo, tal que $[\cdots 1\ 0\ 0\ 0\ \ -1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ \ -1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ \ -1\ 0\ 0\ 0 \cdots]$.
- La señal $y_4[n]$ es una señal periódica a razón de 6 muestras por periodo, tal que $[\cdots 1\ 0\ 0\ \ -1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ \ -1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ \ -1\ 0\ 0 \cdots]$.

Las señales periódicas son estudiadas más en detalle en el apartado 5.4 de este mismo módulo.

5. Tipología de señales

Más allá de la distinción entre señales analógicas y digitales, ya estudiada en los apartados 1.2 y 1.3 de este mismo módulo, en esta sección se identifican diferentes criterios de clasificación de señales. Estos criterios nos van a permitir definir varios tipos de señales de gran importancia y cuyas características principales conviene tener siempre presentes.

Así pues, tanto para señales analógicas como digitales, se tiene que:

- Según **el tipo numérico de los valores de amplitud de la señal**, se distingue entre **señales reales** y **señales complejas**.
- Según si **la señal puede ser conocida *a priori*** o si no puede serlo, se distingue entre **señales deterministas** y **señales aleatorias**.
- Según **la duración de la señal**, se distingue entre **señales finitas** y **señales infinitas**.
- Según si **la señal presenta algún patrón de repetición** o si no lo presenta, se distingue entre **señales periódicas** y **señales aperiódicas**.
- Según **la paridad de la señal**, se distingue entre **señales pares** y **señales impares**.

5.1. Señales reales y señales complejas

Como ya hemos visto en el apartado 1.2 de este mismo módulo, una señal no es otra cosa que una función de una variable independiente. Hasta ahora, a lo largo de este módulo, hemos trabajado siempre con **señales reales**. Es decir, con señales **cuyos valores de amplitud son números reales**.

Por tanto, decir que $x(t)$ es una **señal analógica real** no es más que decir que sus valores de amplitud son reales ($x(t_i) \in \mathbb{R}, \forall t_i \in \mathbb{R}$). O sea, que $x(t)$ es una función que le asigna un valor real a cada valor de la variable independiente. Puesto que la variable t es real, se trata de una función que mapea el conjunto de los reales contra el conjunto de los reales:

$$\begin{aligned} x\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto x(t) \end{aligned} \qquad (100)$$

Análogamente, decir que $x[n]$ es una **señal digital real** no es más que decir que sus valores de amplitud son reales ($x[n_i] \in \mathbb{R}, \forall n_i \in \mathbb{Z}$). O sea, que $x[n]$ es una función que le asigna un valor real a cada valor de la variable independiente. Puesto que la variable n es entera, se trata de una función que mapea el conjunto de los enteros contra el conjunto de los reales:

$$\begin{aligned} x\colon \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto x[n] \end{aligned} \qquad (101)$$

Sin embargo, en la teoría de señales y sistemas también se trabaja con **señales complejas**. Es decir, con señales **cuyos valores de amplitud son números complejos**. En general, para poder distinguirlas fácilmente y no confundirnos, denotaremos a las señales complejas mediante **letras mayúsculas** (aunque en ningún caso es un convenio que se aplique siempre).

Así pues, $X(t)$ será una **señal analógica compleja** cuando sus valores de amplitud sean complejos ($X(t_i) \in \mathbb{C}\,, \forall t_i \in \mathbb{R}$). O sea, que $X(t)$ es una función que le asigna un valor complejo a cada valor de la variable independiente. Puesto que la variable t es real, se trata de una función que mapea el conjunto de los reales contra el conjunto de los complejos:

$$\begin{aligned} X\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto X(t) \end{aligned} \qquad (102)$$

Y, análogamente, $X[n]$ será una **señal digital compleja** cuando sus valores de amplitud sean complejos ($X[n] \in \mathbb{C}\,, \forall n_i \in \mathbb{Z}$). O sea, que $X[n]$ es una función que le asigna un valor complejo a cada valor de la variable independiente. Puesto que la variable n es entera, se trata de una función que mapea el conjunto de los reales contra el conjunto de los complejos:

$$\begin{aligned} X\colon \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ n &\longmapsto X[n] \end{aligned} \qquad (103)$$

En realidad, conceptualmente hablando, la distinción entre señales reales y señales complejas se reduce exactamente a esto, puesto que todos los conceptos que hemos visto hasta ahora (operaciones con señales, parámetros de caracterización de señales, transformaciones básicas de señales, etc.) se aplican indistintamente tanto a señales reales como complejas (si bien todas las señales concretas con las que hemos trabajado hasta este punto han sido siempre reales). Sin embargo, conviene hacer algunas aclaraciones a fin de, cuando en módulos posteriores llegue el momento de trabajar con señales complejas, no tener dudas acerca de cómo aplicar todo lo visto hasta aquí.

Es importante no cometer el error de confundir la distinción entre señales reales y complejas con la distinción entre señales de variable entera, real y compleja. Si tenemos en cuenta ambas distinciones, podemos definir la siguiente taxonomía de señales:

	Variable discreta (señal digital)	**Variable continua (señal analógica)**	
	Entera	Real	Compleja
Señal real	$x[n_i] \in \mathbb{R}\,, \forall n_i \in \mathbb{Z}$	$x(t_i) \in \mathbb{R}\,, \forall t_i \in \mathbb{R}$	$x(s_i) \in \mathbb{R}\,, \forall s_i \in \mathbb{C}$
Señal compleja	$X[n_i] \in \mathbb{C}\,, \forall n_i \in \mathbb{Z}$	$X(t_i) \in \mathbb{C}\,, \forall t_i \in \mathbb{R}$	$X(s_i) \in \mathbb{C}\,, \forall s_i \in \mathbb{C}$

Tabla 2. Señales reales/complejas *vs.* Señales de variable entera/real/compleja.

Así, vemos que **las señales de variable compleja son señales analógicas** que, a su vez, tanto pueden ser reales como complejas. Es decir, tanto pueden ser funciones que le asignen un valor real a cada valor (complejo) de su variable independiente (mapeo del conjunto de los complejos contra el conjunto de los reales):

$$\begin{aligned} x\colon \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ s &\longmapsto x(s) \end{aligned} \qquad (104)$$

como pueden ser funciones que le asignen un valor complejo a cada valor (complejo) de su variable independiente (mapeo del conjunto de los complejos contra el conjunto de los complejos):

$$\begin{aligned} X\colon \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ s &\longmapsto X(s) \end{aligned} \tag{105}$$

En módulos posteriores, también llegará el momento de trabajar con señales complejas de variable compleja y también entonces aplicaremos todo lo visto hasta aquí. Pero, sobre todo, la principal diferencia estará en que no nos interesará representar gráficamente las señales de variable compleja, cosa que sí hemos hecho y seguiremos haciendo con las señales de variable entera o real (ya sean señales reales o complejas).

Finalmente, para un recordatorio rápido acerca de cómo se trabaja con números complejos, se recomienda consultar el Anexo de este módulo.

Y ahora ya estamos en condiciones de definir cómo se trabaja con señales complejas:

Cualquier señal compleja, ya sea analógica ($X(t)$) o digital ($X[n]$), puede ser expresada a partir de dos señales reales, su señal parte real y su señal parte imaginaria[18]:

$$X(t) = \mathfrak{Re}\big(X(t)\big) + j\mathfrak{Im}\big(X(t)\big) \Leftrightarrow X(t_i) = \mathfrak{Re}\big(X(t_i)\big) + j\mathfrak{Im}\big(X(t_i)\big), \forall t_i \in \mathbb{R} \tag{106}$$

$$X[n] = \mathfrak{Re}(X[n]) + j\mathfrak{Im}(X[n]) \Leftrightarrow X[n_i] = \mathfrak{Re}(X[n_i]) + j\mathfrak{Im}(X[n_i]), \forall n_i \in \mathbb{Z} \tag{107}$$

Asimismo, **cualquier señal compleja puede ser expresada a partir de dos señales reales, su señal módulo y su señal fase**[19]:

$$\boxed{X(t) = |X(t)|e^{j\mathfrak{Arg}(X(t))} \;\Leftrightarrow\; X(t_i) = |X(t_i)|e^{j\mathfrak{Arg}(X(t_i))}, \forall t_i \in \mathbb{R}} \tag{108}$$

$$\boxed{X[n] = |X[n]|e^{j\mathfrak{Arg}(X[n])} \;\Leftrightarrow\; X[n_i] = |X[n_i]|e^{j\mathfrak{Arg}(X[n_i])}, \forall n_i \in \mathbb{Z}} \tag{109}$$

Lo más habitual en la teoría de señales y sistemas es trabajar con las señales módulo y fase. De modo que, en general, **representar gráficamente una señal compleja implicará representar su señal módulo y su señal fase** (es decir, representar dos señales reales).

Esto hace que cobre especial importancia la **señal exponencial compleja**, que es una señal típica que se estudia en detalle en el apartado 7.5 de este mismo módulo.

Las **operaciones básicas con señales** presentadas en la sección 2 se aplican sin más a las señales complejas. Por lo tanto:

[18] La ecuación (106) se puede generalizar fácilmente al caso de una señal analógica de variable compleja haciendo $X(s) = \mathfrak{Re}\big(X(s)\big) + j\mathfrak{Im}\big(X(s)\big) \Leftrightarrow X(s_i) = \mathfrak{Re}\big(X(s_i)\big) + j\mathfrak{Im}\big(X(s_i)\big), \forall s_i \in \mathbb{C}$.

[19] La ecuación (108) se puede generalizar fácilmente al caso de una señal analógica de variable compleja haciendo $\boxed{X(s) = |X(s)|e^{j\mathfrak{Arg}(X(s))} \;\Leftrightarrow\; X(s_i) = |X(s_i)|e^{j\mathfrak{Arg}(X(s_i))}, \forall s_i \in \mathbb{C}}$.

- El desplazamiento vertical de una señal compleja (con $K \in \mathbb{C}$) es el desplazamiento vertical de sus señales parte real (con $\mathfrak{Re}(K)$) y parte imaginaria (con $\mathfrak{Im}(K)$).
- Escalar en amplitud una señal compleja (con $K \in \mathbb{C}$) es escalar en amplitud su señal módulo (con $|K|$) y desplazar verticalmente su señal fase (con $\mathfrak{Arg}(K)$).

Las **funciones básicas para definir señales** de la sección 3 se aplican sin más para definir las señales parte real, parte imaginaria, módulo y fase de una señal compleja.

Aplicar las **transformaciones de la variable independiente** del apartado 4 en señales complejas es aplicarlas sin más a sus señales parte real, parte imaginaria, módulo y fase.

5.2. Señales deterministas y aleatorias

Una **señal determinista** es aquella que **puede ser conocida *a priori* en su totalidad**. Por tanto, es posible conocer cualquier valor de amplitud que una señal determinista haya adoptado en cualquier instante pasado, el que esté adoptando en el instante presente y cualquiera que vaya a adoptar en cualquier instante futuro.

Una **señal aleatoria** es aquella que **no puede ser conocida *a priori* en su totalidad**. Por tanto, es posible desconocer algún valor de amplitud que una señal aleatoria haya adoptado en algún instante pasado, o el que esté adoptando en el instante presente, o alguno que vaya a adoptar en algún instante futuro.

En general, **todas las señales con las que vamos a trabajar serán deterministas** (todas con las que hemos trabajado hasta ahora lo son). Sin embargo, hay ámbitos de conocimiento que hacen uso de la teoría de señales y sistemas en los que sí se trabaja con señales aleatorias:

- En los sistemas de comunicación, el ruido presente en el canal de comunicación se modeliza como una señal aleatoria, ya que, evidentemente, es una señal desconocida.
- Análogamente, en electrónica, el ruido presente el ruido eléctrico presente en un circuito también es desconocido y también se modeliza como una señal aleatoria.
- En procesamiento avanzado de señal, un filtro adaptativo trabaja en escenarios que no son estáticos, que cambian con el paso del tiempo, de modo que sus señales de entrada y de salida son señales aleatorias.

Como hemos visto en (100)-(105), las señales deterministas se modelizan mediante funciones conocidas que recorren la variable independiente en su totalidad y que asignan un valor de amplitud a cada valor de dicha variable. Por el contrario, las señales aleatorias se modelizan mediante parámetros estadísticos (la distribución de probabilidad de sus valores de amplitud, su media, su variancia, etc.), ya que no hay ninguna función conocida que defina todos sus valores de amplitud (en caso de haberla, ya no serían señales aleatorias, sino deterministas).

5.3. Señales finitas e infinitas

Una **señal finita** es aquella señal que **es igual a $\mathbf{0}$ fuera de un intervalo de duración finita**, o sea, aquella señal cuya amplitud es igual a 0 para todo instante anterior a un cierto punto y para todo instante posterior a un cierto punto:

$$x(t) = 0, \forall t \notin [t_1, t_2] \tag{110}$$

$$x[n] = 0, \forall n \notin \{n_1, \dots, n_2\} \tag{111}$$

allí donde $t_2 \geq t_1$, $n_2 \geq n_1$ y donde la **longitud** (o **duración**) de $x(t)$ es de $t_2 - t_1$ segundos, y la de $x[n]$ es de $n_2 - n_1 + 1$ muestras.

Una **señal infinita** es aquella señal que **no es finita**.

Una **señal orientada a la derecha** es aquella **señal infinita cuya amplitud es igual a $\mathbf{0}$ para todo instante anterior a un cierto punto** (ya sea $\forall t < t_0$, siendo $\infty < t_0 < +\infty$, o ya sea $\forall n < n_0$, siendo $\infty < n_0 < +\infty$).

Una **señal orientada a la izquierda** es aquella **señal infinita cuya amplitud es igual a $\mathbf{0}$ para todo instante posterior a un cierto punto** (ya sea $\forall t > t_0$, siendo $\infty < t_0 < +\infty$, o ya sea $\forall n > n_0$, siendo $\infty < n_0 < +\infty$).

Una **señal orientada a ambos lados** es aquella **señal infinita que no es ni orientada a la derecha ni orientada a la izquierda**.

De estas definiciones se sigue que **una señal digital finita puede ser explicitada numéricamente mediante una secuencia de valores numéricos de longitud finita**; en concreto, una secuencia de **$\boldsymbol{n_2 - n_1 + 1}$ valores numéricos**. Sin embargo, una señal analógica finita no puede, a pesar de ser de longitud finita, ser explicitada numéricamente, puesto que, al tratarse de una señal de variable continua ($t \in \mathbb{R}$), dentro del intervalo $[t_1, t_2]$ hay infinitos valores de t y, por tanto, también hay infinitos valores de amplitud de $x(t)$.

Asimismo, conviene notar que **toda señal continua (es decir, de amplitud continua) es infinita orientada a ambos lados**. Sin embargo, las señales $x(t) = 0$ y $x[n] = 0$ cumplen con la definición de (110) y (111) para señales finitas. En verdad, estas dos «señales» denotan más bien una ausencia de señal.

Finalmente, en lo que llevamos estudiado en este módulo ya pueden encontrarse fácilmente ejemplos de señales finitas e infinitas:

- La señal definida por intervalos en la ecuación (55), en el Ejemplo 5, es una señal finita (ver Figura 10(a)).
- Las señales definidas por intervalos en las ecuaciones (182) y (82), en el Ejemplo 11 y el Ejemplo 8, respectivamente, son señales infinitas orientadas a la derecha (ver Figura 30 y Figura 19, respectivamente).

- Las señales exponenciales definidas en las ecuaciones (31)-(38), en el Ejemplo 3 y el Ejemplo 4, son señales infinitas orientadas a ambos lados (ver Figura 8 y Figura 9).

5.4. Señales periódicas y aperiódicas

Una **señal periódica** es aquella señal **insensible a cualquier desplazamiento horizontal de un múltiplo entero de un cierto valor denominado «periodo fundamental» de la señal**:

$$x(t) = x(t + mT_0) \iff x(t_i) = x(t_i + mT_0), \forall t_i \in \mathbb{R}, \forall m \in \mathbb{Z} \tag{112}$$

$$x[n] = x[n + mN_0] \iff x[n_i] = x[n_i + mN_0], \forall n_i, m \in \mathbb{Z} \tag{113}$$

allí donde $x(t)$ y $x[n]$ son señales periódicas; T_0 es el periodo fundamental de $x(t)$, con $T_0 \in \mathbb{R}$ y $T_0 > 0$; y N_0 es el periodo fundamental de $x[n]$, con $N_0 \in \mathbb{Z}$ y $N > 0$.

Así, $\boldsymbol{x(t)}$ **es una señal periódica de periodo** $\boldsymbol{T_0}$ (expresado en segundos) y $\boldsymbol{x[n]}$ **es una señal periódica de periodo** $\boldsymbol{N_0}$ (o sea, a razón de N_0 muestras por periodo).

Una **señal aperiódica** es aquella señal que **no es periódica**. Por tanto, toda señal sensible a cualquier desplazamiento temporal será aperiódica, y viceversa.

Las señales periódicas son de una importancia capital en la teoría de señales y sistemas. A continuación, se detallan algunas de sus características más básicas, todas ellas derivadas de las definiciones de las ecuaciones (112)-(113).

En primer lugar, es trivial que **toda señal continua es una señal periódica de periodo arbitrario**.

En segundo lugar, se observa que **toda señal periódica es una señal infinita orientada a ambos lados** (los casos particulares de $x(t) = 0$ y $x[n] = 0$ ya los hemos comentado en el apartado 5.3).

En tercer lugar, la **«frecuencia fundamental» de una señal periódica** se define como un valor **proporcional al inverso del periodo fundamental de la señal**:

$$f_0 = \frac{1}{T_0} \quad , \quad \Omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0} \tag{114}$$

$$\omega_0 \propto \frac{2\pi}{N_0} \tag{115}$$

allí donde f_0 y Ω_0 son la frecuencia fundamental de una señal periódica analógica de periodo T_0 (f_0 es el inverso de T_0 y está expresada en Hz; Ω_0 es el inverso de T_0 por un factor 2π y está expresada en rad/seg), y donde ω_0 es la frecuencia fundamental de una señal periódica digital de periodo N_0 (ω_0 es proporcional a $2\pi/N_0$ y está expresada en $rad/muestra$).

Y, en cuarto lugar, toda señal periódica es el resultado de la repetición infinita de una «señal patrón» denominada **periodo básico de la señal**. Este periodo básico es una **señal finita de longitud T_0 o N_0**, que se repite infinitamente a lo largo de la variable independiente cada T_0 segundos, o cada N_0 muestras. Por lo tanto, **toda señal periódica es el resultado de la «extensión periódica» a razón de T_0 segundos por periodo, o a razón de N_0 muestras por periodo, de su periodo básico**:

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_0(t - mT_0) \iff x(t_i + mT_0) = x_0(t_i), \forall t_i \in \mathbb{R}, \forall m \in \mathbb{Z} \tag{116}$$

$$x[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_0[n - mN_0] \iff x[n_i + mN_0] = x_0[n_i], \forall n_i, m \in \mathbb{Z} \tag{117}$$

allí donde $x_0(t)$ y $x_0[n]$ son los periodos básicos de $x(t)$ y $x[n]$, respectivamente, y se definen del siguiente modo:

$$x_0(t) = \begin{cases} x(t) & \text{para} \quad t \in [0, T_0) \\ 0 & \text{para} \quad t \notin [0, T_0) \end{cases} \tag{118}$$

$$x_0[n] = \begin{cases} x[n] & \text{para} \quad n \in \{0, \dots, N_0 - 1\} \\ 0 & \text{para} \quad n \notin \{0, \dots, N_0 - 1\} \end{cases} \tag{119}$$

En lo que llevamos estudiado en este módulo ya podemos encontrar ejemplos de señales periódicas: todas las señales que aparecen en el Ejemplo 9 son periódicas (ver Figura 21).

5.5. Señales pares e impares

La **paridad** de una señal hace referencia a su **simetría**, al hecho de que los valores de amplitud de la señal puedan presentar algún tipo de simetría respecto de algún punto o eje identificable en su representación gráfica. Como veremos a continuación, la paridad (o la simetría) de una señal va ligada al hecho de que la señal sea insensible a transformaciones reflexivas.

Una **señal par** es aquella señal **insensible a la reflexión horizontal sobre el eje de ordenadas**, o sea, aquella señal **simétrica respecto del eje de ordenadas**:

$$x(t) = x(-t) \iff x(t_i) = x(-t_i), \forall t_i \in \mathbb{R} \tag{120}$$

$$x[n] = x[-n] \iff x[n_i] = x[-n_i], \forall n_i \in \mathbb{Z} \tag{121}$$

allí donde $x(t)$ y $x[n]$ son señales pares.

Una **señal impar** es aquella señal **insensible a la doble reflexión (horizontal y vertical sobre los ejes de ordenadas y abscisas, respectivamente)**, o sea, aquella señal **simétrica respecto del origen de coordenadas**:

$$x(t) = -x(-t) \iff x(t_i) = -x(-t_i), \forall t_i \in \mathbb{R} \tag{122}$$

$$x[n] = -x[-n] \iff x[n_i] = -x[-n_i], \forall n_i \in \mathbb{Z} \tag{123}$$

allí donde $x(t)$ y $x[n]$ son señales impares

Se observa, a partir de (122) y (123), que **toda señal impar es igual a $\mathbf{0}$ en $\boldsymbol{t = 0}$ o $\boldsymbol{n = 0}$**.

Asimismo, conviene notar que tanto las señales analógicas como las digitales cumplen un importante teorema en relación con las señales pares e impares:

Toda señal puede ser expresada como el resultado de la suma de una señal par más una señal impar (ver *Demostración 1* en el Anexo de este módulo):

$$x(t) = x_P(t) + x_I(t) \tag{124}$$

$$x[n] = x_P[n] + x_I[n] \tag{125}$$

allí donde $x_P(t)$, $x_P[n]$, $x_I(t)$ y $x_I[n]$ se obtienen a partir de las mismas $x(t)$ y $x[n]$:

$$x_P(t) = \frac{1}{2}\big(x(t) + x(-t)\big) \tag{126}$$

$$x_P[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x[-n]) \tag{127}$$

$$x_I(t) = \frac{1}{2}\big(x(t) - x(-t)\big) \tag{128}$$

$$x_I[n] = \frac{1}{2}(x[n] - x[-n]) \tag{129}$$

siendo $x(t)$ y $x[n]$ dos señales cualesquiera, $x_P(t)$ y $x_P[n]$ señales pares, y $x_I(t)$ y $x_I[n]$ señales impares.

Y, para acabar, vemos que en lo que llevamos estudiado en este módulo también podemos encontrar fácilmente ejemplos de señales pares e impares:

- La señal definida en la ecuación (37), en el Ejemplo 4, es una señal par (su simetría respecto del eje de ordenadas puede apreciarse en la Figura 9(a)).
- La señal definida por intervalos en la ecuación (56), en el Ejemplo 5, es una señal impar (su simetría respecto del origen de coordenadas puede apreciarse en la Figura 10(a)).

6. Parámetros básicos de una señal

Como ya hemos visto, las señales no son más que funciones de una variable independiente. Por lo tanto, todos aquellos parámetros que permiten caracterizar una función sirven también para caracterizar una señal: máximos, mínimos, cotas superiores, cotas inferiores, pasos por cero, puntos de inflexión, etc.

En esta sección, se presentan los parámetros fundamentales (hay muchos otros, por supuesto) que permiten caracterizan una señal:

- Los valores **máximo** y **mínimo** de una señal.
- El ***offset*** (o valor medio) una señal.
- La **energía** y la **potencia media** de una señal.

Asimismo, se estudia también cómo afectan a cada uno de estos parámetros las operaciones de desplazamiento vertical y escalado en amplitud de una señal (ver apartados 2.1 y 2.2), así como las transformaciones de la variable independiente (ver sección 4).

6.1. Valores máximo y mínimo de una señal

El **máximo** de una señal se define como **el máximo valor de amplitud de la señal**[20]:

$$\max\big(x(t)\big) \triangleq \max_{t_i \in \mathbb{R}}\{x(t_i)\} \tag{130}$$

$$\max(x[n]) \triangleq \max_{n_i \in \mathbb{Z}}\{x[n_i]\} \tag{131}$$

El máximo **existe** cuando es igual a la **menor cota superior** (o **supremo**) de la señal, que es **el menor valor finito mayor o igual que cualquier valor de amplitud de la señal**[21]:

$$S_x \triangleq \min_j\big\{a_j \geq x(t_i)\,, \forall t_i \in \mathbb{R}\big\} \implies S_x \geq x(t) \tag{132}$$

$$S_x \triangleq \min_j\big\{a_j \geq x[n_i]\,, \forall n_i \in \mathbb{Z}\big\} \implies S_x \geq x[n] \tag{133}$$

allí donde S_x es el supremo de $x(t)$ en (132), y de $x[n]$ en (133), y donde los a_j son todas las cotas superiores de la señal, es decir, **todos aquellos valores finitos que son mayores o iguales que cualquier valor de amplitud de la señal**[22].

[20] La ecuación (130) se puede generalizar fácilmente al caso de una señal analógica de variable compleja haciendo $\max\big(x(s)\big) \triangleq \max_{s_i \in \mathbb{C}} x(s_i)$.

[21] El símbolo $\implies$ se lee como «implica que». Así, **cuando escribimos $a \implies b$, estamos diciendo que «a implica b», es decir, que «siempre que sucede a entonces también sucede b»**. De hecho, $a \iff b$ quiere decir que $a \implies b$ y $b \implies a$.

Antes que nada, conviene aclarar que, en (132) y (133), por $S_x \geq x(t)$ y $S_x \geq x[n]$ se entiende, respectivamente, lo siguiente:

$$S_x \geq x(t) \iff S_x \geq x(t_i)\,, \forall t_i \in \mathbb{R} \tag{134}$$

$$S_x \geq x[n] \iff S_x \geq x[n_i]\,, \forall n_i \in \mathbb{Z} \tag{135}$$

Así pues, si **una señal tiene máximo** implica que **existe su supremo** y que **hay al menos un valor de amplitud de la señal que es igual al supremo (y ese valor es el máximo de la señal)**.

$$\exists \max\big(x(t)\big) \implies \begin{cases} \exists S_x \\ \max\big(x(t)\big) = S_x \end{cases} \tag{136}$$

$$\exists \max(x[n]) \implies \begin{cases} \exists S_x \\ \max(x[n]) = S_x \end{cases} \tag{137}$$

Sin embargo, **que exista el supremo de una señal no implica que la señal tenga máximo**[23]:

$$\exists S_x \nRightarrow \exists \max\big(x(t)\big) \tag{138}$$

$$\exists S_x \nRightarrow \exists \max(x[n]) \tag{139}$$

Así, hay dos casos en los que una señal no tiene máximo:

- Existe el supremo de la señal, pero la señal no llega a alcanzarlo; por ejemplo, en el caso de algunas señales asintóticas.
- No existe el supremo de la señal; por ejemplo, en el caso de una señal cuya amplitud crece tendiendo a $+\infty$.

El **mínimo** de una señal se define como **el mínimo valor de amplitud de la señal**[24]:

$$\min\big(x(t)\big) \triangleq \min_{t_i \in \mathbb{R}}\{x(t_i)\} \tag{140}$$

$$\min(x[n]) \triangleq \min_{n_i \in \mathbb{Z}}\{x[n_i]\} \tag{141}$$

El mínimo **existe** cuando es igual a la **mayor cota inferior** (o **ínfimo**) de la señal, que es **el mayor valor finito menor o igual que cualquier valor de amplitud de la señal**[25]:

$$I_x \triangleq \max_j\big\{a_j \leq x(t_i)\,, \forall t_i \in \mathbb{R}\big\} \implies I_x \leq x(t) \tag{142}$$

---

[22] La ecuación (132) se puede generalizar fácilmente al caso de una señal analógica de variable compleja haciendo $S_x \triangleq \min_j\big\{a_j \geq x(s_i)\,, \forall s_i \in \mathbb{C}\big\} \implies x(s) \leq S_x \iff x(s_i) \leq S_x\,, \forall s_i \in \mathbb{C}$.

[23] El símbolo $\nRightarrow$ se lee como «no implica que». Así, **cuando escribimos $a \nRightarrow b$, estamos diciendo que «a no implica b», es decir, que «no siempre que sucede a entonces también sucede b»**.

[24] La ecuación (140) se puede generalizar fácilmente al caso de una señal analógica de variable compleja haciendo $\min\big(x(s)\big) \triangleq \min_{s_i \in \mathbb{C}} x(s_i)$.

[25] La ecuación (142) se puede generalizar fácilmente al caso de una señal analógica de variable compleja haciendo $I_x \triangleq \max_j\big\{a_j \leq x(s_i)\,, \forall s_i \in \mathbb{C}\big\} \implies x(s) \geq I_x \iff x(s_i) \geq I_x\,, \forall s_i \in \mathbb{C}$.

$$I_x \triangleq \max_j\{a_j \leq x[n_i]\,, \forall n_i \in \mathbb{Z}\} \implies I_x \leq x[n] \tag{143}$$

allí donde I_x es el ínfimo de $x(t)$ en (142), y de $x[n]$ en (143); y donde los a_j son todas las cotas inferiores de la señal, es decir, **todos aquellos valores finitos que son menores o iguales que cualquier valor de amplitud de la señal**.

Análogamente, en (142) y (143), por $I_x \leq x(t)$ y $I_x \leq x[n]$ se entiende que:

$$I_x \leq x(t) \iff I_x \leq x(t_i)\,, \forall t_i \in \mathbb{R} \tag{144}$$

$$I_x \leq x[n] \iff I_x \leq x[n_i]\,, \forall n_i \in \mathbb{Z} \tag{145}$$

Por tanto, si **una señal tiene mínimo** implica que **existe su ínfimo** y que **hay al menos un valor de amplitud de la señal que es igual a su ínfimo (y ese valor es el mínimo de la señal)**.

$$\exists \min\big(x(t)\big) \implies \begin{cases} \exists I_x \\ \min\big(x(t)\big) = I_x \end{cases} \tag{146}$$

$$\exists \min(x[n]) \implies \begin{cases} \exists I_x \\ \min(x[n]) = I_x \end{cases} \tag{147}$$

Sin embargo, **que exista el ínfimo de una señal no implica que la señal tenga mínimo**:

$$\exists I_x \nRightarrow \exists \min\big(x(t)\big) \tag{148}$$

$$\exists I_x \nRightarrow \exists \min(x[n]) \tag{149}$$

Así, hay también dos casos en los que una señal no tiene mínimo:

- Existe el ínfimo de la señal, pero la señal no llega a alcanzarlo; por ejemplo, en el caso de algunas señales asintóticas.
- No existe el ínfimo de la señal; por ejemplo, en el caso de una señal cuya amplitud decrece tendiendo a $-\infty$.

En general, las ecuaciones (130)-(149) están definidas para **señales reales**. En el caso de trabajar con **señales complejas**, los valores máximo, mínimo, supremo e ínfimo se pueden calcular tanto de las señales parte real y parte imaginaria, como de las señales módulo y fase.

Se dice de una señal que está **acotada en amplitud** si y solo si **tiene cota superior y cota inferior**, es decir, si **su supremo y su ínfimo existen**[26]:

$$I_x \leq x(t) \leq S_x \iff I_x \leq x(t_i) \leq S_x\,, \forall t_i \in \mathbb{R} \tag{150}$$

$$I_x \leq x[n] \leq S_x \iff I_x \leq x[n_i] \leq S_x\,, \forall n_i \in \mathbb{Z} \tag{151}$$

[26] La ecuación (150) se puede generalizar fácilmente al caso de una señal analógica de variable compleja haciendo $I_x \leq x(s) \leq S_x \iff I_x \leq x(s_i) \leq S_x\,, \forall s_i \in \mathbb{C}$.

allí donde S_x e I_x son, respectivamente, el supremo y el ínfimo de $x(t)$ en (150), y de $x[n]$ en (151).

Las ecuaciones (150) y (151) pueden expresarse también en términos del valor absoluto de las amplitudes de la señal, el supremo y el ínfimo[27]:

$$|x(t)| \leq A \iff |x(t_i)| \leq A \,, \forall t_i \in \mathbb{R} \tag{152}$$

$$|x[n]| \leq A \iff |x[n_i]| \leq A \,, \forall n_i \in \mathbb{Z} \tag{153}$$

allí donde A es un valor real finito no negativo ($A \in \mathbb{R}\,, A \geq 0$), que es igual al máximo entre el valor absoluto del supremo y del ínfimo ($A = \max\{|S_x|, |I_x|\}$).

Asimismo, también pueden calcularse **los valores máximo y mínimo de una señal en un intervalo finito** de tiempo, así como su supremo y su ínfimo. A tal efecto, simplemente hay que restringir el conjunto de valores posibles de t_i y n_i en las ecuaciones (130)-(133), (140)-(143) y (150)-(153) a $t \in [t_1, t_2]$ y $n \in \{n_1, \ldots, n_2\}$, según corresponda en cada caso.

En este sentido, en el caso de trabajar con **señales periódicas**, los valores máximo, mínimo, supremo e ínfimo de la señal, si existen, serán **los valores máximo, mínimo, supremo e ínfimo de su periodo básico** (que, como ya sabemos, es una señal finita de duración igual al periodo fundamental de la señal periódica).

A continuación, se propone un ejercicio de cálculo del máximo, el mínimo, el supremo y el ínfimo de diferentes señales.

Ejemplo 10

Se pide calcular el máximo, el mínimo, el supremo y el ínfimo de las señales siguientes:

$$x_1(t) = \frac{1}{1 + e^{-t}} \tag{154}$$

$$x_2(t) = \frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{2}t^2 \tag{155}$$

$$x_3[n] = e^{-\frac{1}{100}n^2} \tag{156}$$

Solución

Para una versión extendida y detallada del uso de MATLAB en la resolución de este ejercicio, se recomienda consultar el Anexo de este módulo.

a) Empezamos con $x_1(t)$. Para calcular estos parámetros, acostumbra a ser de gran utilidad empezar representando gráficamente la señal:

[27] La ecuación (152) se puede generalizar fácilmente al caso de una señal analógica de variable compleja haciendo $|x(s)| \leq A \iff |x(s_i)| \leq A \,, \forall s_i \in \mathbb{C}$.

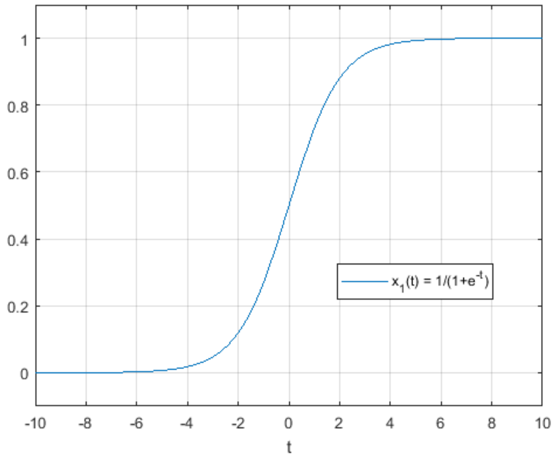

Figura 22. Representación gráfica de $x_1(t)$.

Se observa que $x_1(t)$ es una señal con forma de sigmoide, lo cual implica que tiende asintóticamente a 0 para valores muy negativos de t, y a 1 para valores muy positivos de t:

$$\begin{gathered}\lim_{t\to-\infty} x_1(t) = \lim_{t\to-\infty} \frac{1}{1+e^{-t}} = \lim_{t\to-\infty} \frac{1}{e^{-t}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{e^{t}} = 0 \\ \lim_{t\to+\infty} x_1(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{1+e^{-t}} = \lim_{t\to-\infty} \frac{1}{1+e^{t}} = \lim_{t\to+\infty} 1 = 1\end{gathered} \qquad (157)$$

Por tanto, hemos podido comprobar que la señal $\boldsymbol{x_1(t)}$ **está acotada en amplitud entre $\boldsymbol{0}$ y $\boldsymbol{1}$**, pero que nunca alcanza esas cotas, puesto que tiende asintóticamente hacia ambas. De este modo, concluimos que $\boldsymbol{x_1(t)}$ **sí tiene supremo e ínfimo (sus menores cotas superior e inferior, respectivamente; o sea, sus asíntotas horizontales), pero no tiene máximo ni mínimo**:

$$\begin{gathered}S_{x_1} = 1 \\ \nexists \max\big(x_1(t)\big) \\ I_{x_1} = 0 \\ \nexists \min\big(x_1(t)\big)\end{gathered} \qquad (158)$$

Finalmente, podemos representar gráficamente el supremo y el ínfimo de $x_1(t)$ añadiéndolos a la gráfica de la señal. Los representaremos como líneas punteadas en rojo:

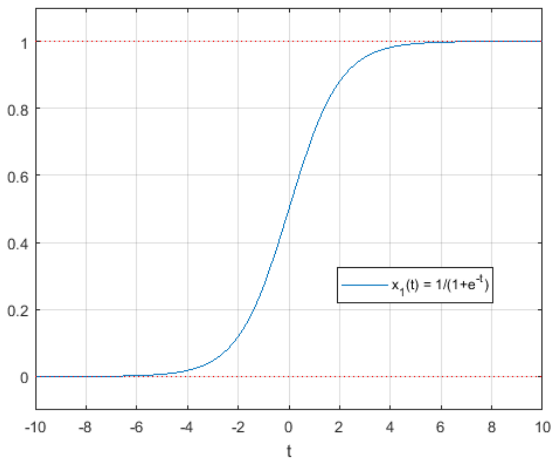

Figura 23. Representación gráfica de $x_1(t)$, su supremo y su ínfimo.

b) Representamos gráficamente $x_2(t)$:

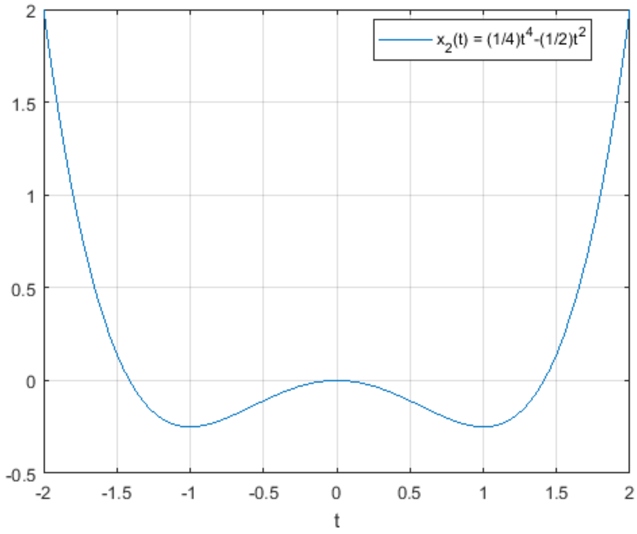

Figura 24. Representación gráfica de $x_2(t)$.

Se observa que $x_2(t)$ crece sin parar tanto para valores muy negativos como muy positivos de t:

$$\lim_{t\to-\infty} x_2(t) = \lim_{t\to-\infty}\left(\frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{2}t^2\right) = \frac{1}{4}\lim_{t\to-\infty} t^4 = +\infty$$
$$\lim_{t\to+\infty} x_2(t) = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{2}t^2\right) = \frac{1}{4}\lim_{t\to+\infty} t^4 = +\infty \tag{159}$$

Esto ya nos indica que **$x_2(t)$ no está acotada superiormente, de modo que su supremo no existe y, por tanto, tampoco su máximo**:

$$\nexists S_{x_2}$$
$$\nexists \max\big(x_2(t)\big) \tag{160}$$

Y en lo referente a su ínfimo y su mínimo, en la Figura 24 se observa que $x_2(t)$ sí está acotada inferiormente, de modo que **su ínfimo existe**. Además, también se observa que alcanza su ínfimo en dos puntos distintos, de modo que **el mínimo de $x_2(t)$ también existe**. Para averiguar cuáles son estos puntos y obtener así el valor del ínfimo (y, de hecho, también del mínimo, puesto que hemos visto que el mínimo existe y sabemos que, si el mínimo existe, es igual al ínfimo), hemos de hallar los puntos críticos de $x_2(t)$, o sea, aquellos valores de t en los que la derivada de $x_2(t)$ se anula. Ya se observa en la Figura 24 que $x_2(t)$ tiene tres puntos críticos: dos mínimos absolutos y un máximo local en $t = 0$ (que no debe ser confundido, desde luego, con su valor máximo, el cual, como hemos visto, no existe).

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = \frac{d\left(\frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{2}t^2\right)}{dt} = t^3 - t$$
$$\frac{dx_2(t)}{dt} = 0 \Rightarrow t^3 - t = 0 \Rightarrow t(t^2 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 0 \\ t_2 = 1 \\ t_3 = -1 \end{cases} \tag{161}$$

Ahora, evaluando $x_2(t)$ en cualquiera de los otros dos puntos críticos (lo haremos para $t = 1$), obtendremos los valores de su ínfimo y su mínimo, que, obviamente, son el mismo (tal y como nos indica la ecuación (146), si el mínimo existe, también existe el ínfimo y ambos coinciden):

$$I_{x_2} = \min\big(x_2(t)\big) = x_2(1) = \frac{1}{4}1^4 - \frac{1}{2}1^2 = -\frac{1}{4} \tag{162}$$

Finalmente, añadimos el ínfimo y el mínimo de $x_2(t)$ a la representación gráfica de la señal. Indicaremos los puntos en los que la señal alcanza su valor mínimo mediante líneas verticales punteadas en rojo que vayan desde el suelo de la gráfica hasta la altura de valor mínimo (que es la del ínfimo, como sabemos):

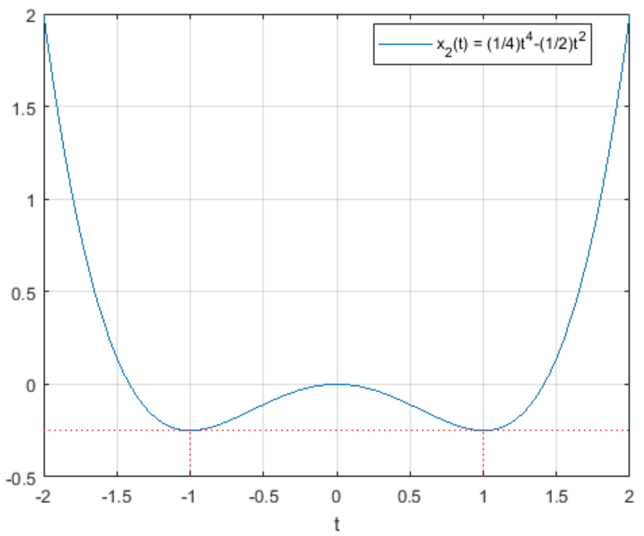

Figura 25. Representación gráfica de $x_2(t)$, su ínfimo y los puntos en los que alcanza su mínimo.

c) Representamos gráficamente $x_3[n]$:

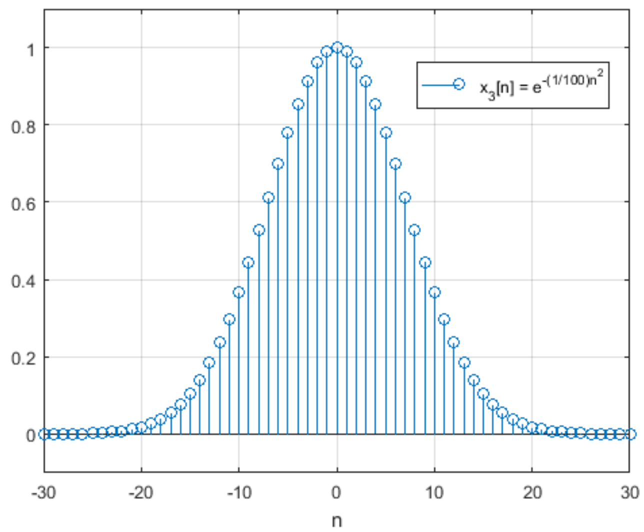

Figura 26. Representación gráfica de $x_3[n]$.

Se observa que $x_3[n]$ es una señal con forma de campana de Gauss discretizada, lo cual implica que tiende asintóticamente a 0 para valores muy negativos y muy positivos de n, y que presenta un máximo absoluto de valor 1 para $n = 0$.

Por tanto, $\boldsymbol{x_3[n]}$ **está acotada en amplitud entre $\boldsymbol{0}$ y $\boldsymbol{1}$**, de modo que sí **tiene supremo e ínfimo** Además, mientras que sí alcanza su supremo, de modo que **sí tiene máximo**, nunca alcanza su ínfimo, puesto que tiene asintóticamente hacia él, de modo que **no tiene mínimo**.

Empezaremos calculando su ínfimo:

$$\lim_{n\to+\infty} x_3[n] = \lim_{n\to+\infty}\left(e^{-\frac{1}{100}n^2}\right) = \lim_{n\to-\infty}\left(\frac{1}{e^{\frac{1}{100}n^2}}\right) = 0 \qquad (163)$$

Por lo tanto, ya podemos concluir que:

$$S_{x_3} = \max(x_3[n]) = x_3[0] = e^{-\frac{1}{100}0^2} = e^0 = 1$$
$$I_{x_3} = 0 \qquad (164)$$
$$\nexists \min(x_3[n])$$

Y ahora añadimos el supremo, el máximo y el ínfimo de $x_3[n]$ a la representación gráfica de la señal. Para indicar el punto máximo haremos lo mismo que hicimos en el apartado anterior con el mínimo, solo que mediante una línea vertical punteada en rojo que vaya desde el techo de la gráfica hasta la altura de valor máximo:

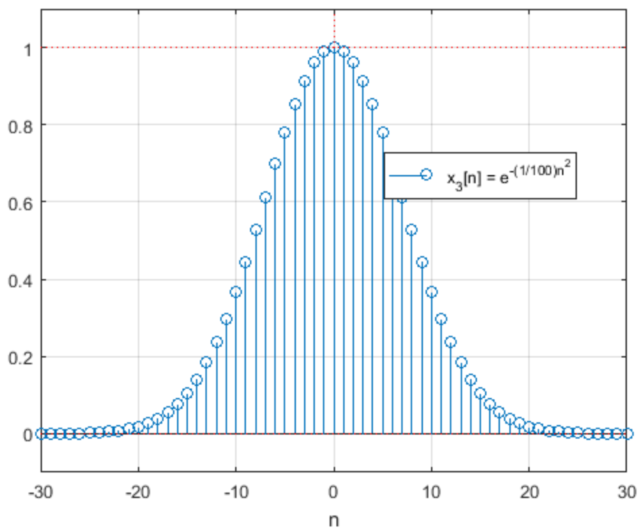

Figura 27. Representación gráfica de $x_3[n]$, su supremo, su máximo y su ínfimo.

Finalmente, y para acabar este apartado, se comenta qué efectos tienen las operaciones de **desplazamiento vertical** y **escalado en amplitud** de una señal, así como las **transformaciones de su variable independiente**, sobre sus valores máximo, mínimo, supremo e ínfimo.

Siendo $x(t)$ y $x[n]$ dos señales cualesquiera cuyos valores máximo, mínimo, supremo e ínfimo existen; K una constante; t_0 y a constantes reales positivas; n_0 una constante entera positiva; y b una constante racional positiva:

Sumarle una constante a una señal implica sumarle esa constante a sus valores máximo, mínimo, supremo e ínfimo[28]:

[28] Si $x(t)$ y $x[n]$ tienen supremo e ínfimo, pero no máximo y mínimo, las ecuaciones (165) y (166) son válidas solo para el supremo y el ínfimo; en tal caso, los valores máximo y mínimo de $y(t)$ e $y[n]$ tampoco existirían.

$$y(t) = x(t) + K \Rightarrow \begin{cases} \max\big(y(t)\big) = \max\big(x(t)\big) + K \text{ , } S_y = S_x + K \\ \min\big(y(t)\big) = \min\big(x(t)\big) + K \text{ , } I_y = I_x + K \end{cases} \quad (165)$$

$$y[n] = x[n] + K \Rightarrow \begin{cases} \max(y[n]) = \max(x[n]) + K \text{ , } S_y = S_x + K \\ \min(y[n]) = \min(x[n]) + K \text{ , } I_y = I_x + K \end{cases} \quad (166)$$

Este caso es trivial: en la medida en que sumarle K a una señal implica desplazarla verticalmente, sus valores máximo, mínimo, supremo e ínfimo, si existen, se desplazarán también en esa misma medida.

Multiplicar una señal por una constante implica multiplicar sus valores máximo, mínimo, supremo e ínfimo por esa constante[29]:

$$y(t) = Kx(t) \Rightarrow \begin{cases} \max\big(y(t)\big) = K\max\big(x(t)\big) \text{ , } S_y = KS_x \\ \min\big(y(t)\big) = K\min\big(x(t)\big) \text{ , } I_y = KI_x \end{cases} \quad (167)$$

$$y[n] = Kx[n] \Rightarrow \begin{cases} \max(y[n]) = K\max(x[n]) \text{ , } S_y = KS_x \\ \min(y[n]) = K\min(x[n]) \text{ , } I_y = KI_x \end{cases} \quad (168)$$

Análogamente, en la medida en que multiplicar una señal por K implica escalarla verticalmente, sus valores máximo, mínimo, supremo e ínfimo, si existen, quedarán también escalados en esa misma medida.

Sumar (o restar) una constante a la variable independiente no modifica los valores máximo, mínimo, supremo e ínfimo de la señal[30]:

$$y(t) = x(t \pm t_0) \Rightarrow \begin{cases} \max\big(y(t)\big) = \max\big(x(t)\big) \text{ , } S_y = S_x \\ \min\big(y(t)\big) = \min\big(x(t)\big) \text{ , } I_y = I_x \end{cases} \quad (169)$$

$$y[n] = x[n \pm n_0] \Rightarrow \begin{cases} \max(y[n]) = \max(x[n]) + K \text{ , } S_y = S_x \\ \min(y[n]) = \min(x[n]) + K \text{ , } I_y = I_x \end{cases} \quad (170)$$

Este caso es asimismo trivial: en la medida en que sumar (o restar) una constante a la variable independiente implica desplazar horizontalmente la señal, sus valores máximo, mínimo,

[29] Si $x(t)$ y $x[n]$ tienen supremo e ínfimo, pero no máximo y mínimo, las ecuaciones (167) y (168) son válidas solo para el supremo y el ínfimo; en tal caso, los valores máximo y mínimo de $y(t)$ e $y[n]$ tampoco existirían.

[30] Si $x(t)$ y $x[n]$ tienen supremo e ínfimo, pero no máximo y mínimo, las ecuaciones (169) y (170) son válidas solo para el supremo y el ínfimo; en tal caso, los valores máximo y mínimo de $y(t)$ e $y[n]$ tampoco existirían.

supremo e ínfimo, si existen, no se verán modificados por esta transformación. Todo lo que pasará es que sus respectivas ubicaciones a lo largo de la variable independiente se verán desplazadas en la misma medida: si, por ejemplo, $x(t)$ presenta un máximo en $t = t_1$, entonces $x(t + t_0)$ presentará ese mismo máximo en $t = t_1 + t_0$.

Cambiarle el signo a la variable independiente no modifica los valores máximo, mínimo, supremo e ínfimo de la señal[31]:

$$y(t) = x(-t) \;\Rightarrow \begin{cases} \max\big(y(t)\big) = \max\big(x(t)\big)\ ,\ S_y = S_x \\ \min\big(y(t)\big) = \min\big(x(t)\big)\ ,\ I_y = I_x \end{cases} \tag{171}$$

$$y[n] = x[-n] \;\Rightarrow \begin{cases} \max(y[n]) = \max(x[n]) + K\ ,\ S_y = S_x \\ \min(y[n]) = \min(x[n]) + K\ ,\ I_y = I_x \end{cases} \tag{172}$$

De modo análogo, reflejar horizontalmente una señal tampoco modifica sus valores máximo, mínimo, supremo e ínfimo, si existen, sino únicamente sus respectivas ubicaciones a lo largo de la variable independiente (también se verán reflejadas 180° respecto del eje de ordenadas): si, por ejemplo, $x(t)$ presenta un máximo en $t = t_1$, entonces $x(-t)$ presentará ese mismo máximo en $t = -t_1$.

Multiplicar por una constante la variable independiente de una señal analógica no modifica sus valores máximo, mínimo, supremo e ínfimo[32]:

$$y(t) = x(at) \;\Rightarrow \begin{cases} \max\big(y(t)\big) = \max\big(x(t)\big)\ ,\ S_y = S_x \\ \min\big(y(t)\big) = \min\big(x(t)\big)\ ,\ I_y = I_x \end{cases} \tag{173}$$

Multiplicar por una constante la variable independiente de una señal digital sí puede modificar sus valores máximo, mínimo, supremo e ínfimo[33]:

$$y[n] = x[bn] \;\not\Rightarrow \begin{cases} \max(y[n]) = \max(x[n]) + K\ ,\ S_y = S_x \\ \min(y[n]) = \min(x[n]) + K\ ,\ I_y = I_x \end{cases} \tag{174}$$

En el caso analógico, el escalado de la variable independiente no provoca la aparición de ningún nuevo valor de amplitud que no estuviese ya en la señal original, por lo que sus valores

[31] Si $x(t)$ y $x[n]$ tienen supremo e ínfimo, pero no máximo y mínimo, las ecuaciones (171) y (172) son válidas solo para el supremo y el ínfimo; en tal caso, los valores máximo y mínimo de $y(t)$ e $y[n]$ tampoco existirían.

[32] Si $x(t)$ tiene supremo e ínfimo, pero no máximo y mínimo, la ecuación (173) es válida solo para el supremo y el ínfimo; en tal caso, los valores máximo y mínimo de $y(t)$ tampoco existirían.

[33] Si $x[n]$ tiene supremo e ínfimo, pero no máximo y mínimo, la ecuación (174) es válida solo para el supremo y el ínfimo; en tal caso, los valores máximo y mínimo de $y[n]$ tampoco existirían.

máximo, mínimo, supremo e ínfimo, si existen, no se verán modificados por esta transformación.

En el caso digital, por el contrario, esto no es así, puesto que en el diezmo se eliminan directamente muestras de la señal original y en la inserción de ceros se le añaden nuevas muestras (de amplitud 0) a la señal original, de modo que sus valores máximo, mínimo, supremo e ínfimo, si existen, sí pueden verse perfectamente modificados.

6.2. *Offset* (o valor medio) de una señal

El ***offset*** (o **valor medio**) de una señal se define como **el promedio de los valores de amplitud de la señal**:

$$\mu_x \triangleq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)dt \tag{175}$$

$$\mu_x \triangleq \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x[n] \tag{176}$$

allí donde μ_x es el *offset* de $x(t)$ en la ecuación (175), y el de $x[n]$ en la ecuación (176).

Por un lado, la ecuación (175) nos dice que el *offset* de $x(t)$ se calcula sumando todos los valores de amplitud de $x(t)$ y dividiendo entre el número de valores sumados. Primero, puesto que la variable t es continua, **la suma a lo largo de t se calcula mediante una integral en t**. Y segundo, **el número de valores sumados se corresponde con la longitud del intervalo de integración**, que, por abarcar toda la recta real ($t \in \mathbb{R}$), es infinito. Para poder hacer esto, se definen los límites de integración entre $-T$ y T (lo cual da lugar a un intervalo de integración de longitud $2T$) y se calcula el límite para $T \to \infty$ de toda la operación[34].

Por otro lado, la ecuación (176) nos dice que el *offset* de $x[n]$ se calcula sumando todos los valores de amplitud de $x[n]$ y dividiendo entre el número de valores sumados. Primero, puesto que la variable n es discreta, **la suma a lo largo de n es una serie expresada mediante un sumatorio en n**. Y segundo, **el número de valores sumados se corresponde con el número de términos de la serie**, que, por abarcar todos los valores enteros ($n \in \mathbb{Z}$), es infinito. Para poder hacer esto, se definen los límites del sumatorio entre $-N$ y N (lo cual da lugar a una serie de $2N+1$ términos) y se calcula el límite para $N \to \infty$ de toda la operación.

Asimismo, también puede calcularse **el *offset* de una señal en un intervalo finito** de tiempo, con lo que las ecuaciones de cálculo se simplifican ligeramente:

[34] Esta explicación se generaliza fácilmente al caso de una señal analógica de variable compleja haciendo que la integral abarque todo el dominio de una variable compleja, o sea, todo el plano complejo ($s \in \mathbb{C}$).

$$\mu_{x_{t_1}^{t_2}} \triangleq \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} x(t)dt \qquad (177)$$

$$\mu_{x_{n_1}^{n_2}} \triangleq \frac{1}{n_2 - n_1 + 1} \sum_{n=n_1}^{n_2} x[n] \qquad (178)$$

allí donde $\mu_{x_{t_1}^{t_2}}$ es el *offset* de $x(t)$ en el intervalo $t \in [t_1, t_2]$, y $\mu_{x_{n_1}^{n_2}}$ es el *offset* de $x[n]$ en el intervalo $n \in \{n_1, \dots, n_2\}$.

En este sentido, en el caso de trabajar con **señales periódicas**, el *offset* de la señal será **el *offset* de su periodo básico** (que, como ya sabemos, es una señal finita de duración igual al periodo fundamental de la señal periódica).

En general, las definiciones de *offset* de las ecuaciones (175)-(178) sirven indistintamente tanto para **señales reales** como para **señales complejas**. Aun así, en el caso de señales complejas, se puede también (y, de hecho, es lo más habitual en la práctica) calcular el *offset* tanto de las señales parte real y parte imaginaria, como de las señales módulo y fase.

A continuación, se propone un ejercicio de cálculo del *offset* de diferentes señales.

Ejemplo 11

Se tienen las siguientes señales:

$$x_1(t) = \frac{1}{1 + e^{-t}} \qquad (179)$$

$$x_2[n] = \frac{1}{4}n^4 - \frac{1}{2}n^2 \qquad (180)$$

$$x_3[n] = 1 + 2n \qquad (181)$$

$$x_4[n] = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad n < 0 \\ (1/2)^n & \text{para} \quad n \geq 0 \end{cases} \qquad (182)$$

Se pide calcular, para cada una de ellas, los siguientes parámetros:

- Su *offset*.
- Su *offset* en $t \in [0,2]$, si la señal es analógica.
- Su *offset* en $n \in \{0, \dots, 99\}$, si la señal es digital.

Solución

Para una versión extendida y detallada del uso de MATLAB en la resolución de este ejercicio, se recomienda consultar el Anexo de este módulo.

a) Vemos que $x_1(t)$ es la señal sigmoide de la Figura 22 en el Ejemplo 10. Solo con observar la gráfica ya puede intuirse que el *offset* de esta señal será igual a $\frac{1}{2}$, pues está centrada en ese valor de amplitud. Y, luego, el valor de su *offset* en $t \in [0,2]$ habrá de estar comprendido entre $\frac{1}{2}$ y 1.

En todo caso, calculamos el *offset* de $x_1(t)$ mediante la ecuación (175):

$$\mu_1 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x_1(t)dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left(\frac{1}{1+e^{-t}}\right) dt = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left(\frac{e^t}{1+e^t}\right) dt =$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{[\ln(1+e^t)]_{-T}^{T}}{2T} = \lim_{T\to\infty} \frac{\ln(1+e^T) - \ln(1+e^{-T})}{2T} = \lim_{T\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{1+e^T}{1+e^{-T}}\right)}{2T} = \tag{183}$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\ln\left(e^T \frac{1+e^{-T}}{1+e^{-T}}\right)}{2T} = \lim_{T\to\infty} \frac{\ln(e^T)}{2T} = \lim_{T\to\infty} \frac{T}{2T} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Y ahora calculamos el *offset* de $x_1(t)$ en $t \in [0,2]$ mediante la ecuación (175):

$$\mu_{1_0}^{\;2} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} x_1(t)dt = \frac{1}{2-0} \int_{0}^{2} \left(\frac{1}{1+e^{-t}}\right) dt = \frac{1}{2} [\ln(1+e^t)]_0^2 =$$

$$\frac{1}{2}(\ln(1+e^2) - \ln(1+e^0)) = \ln\left(\frac{1+e^2}{2}\right) \cong 0.7169 \tag{184}$$

Para finalizar, representamos gráficamente $x_1(t)$ y le añadimos a la gráfica el nivel de su *offset*, que representaremos, como ya hemos hecho antes con el supremo y el ínfimo, mediante una línea horizontal punteada en rojo:

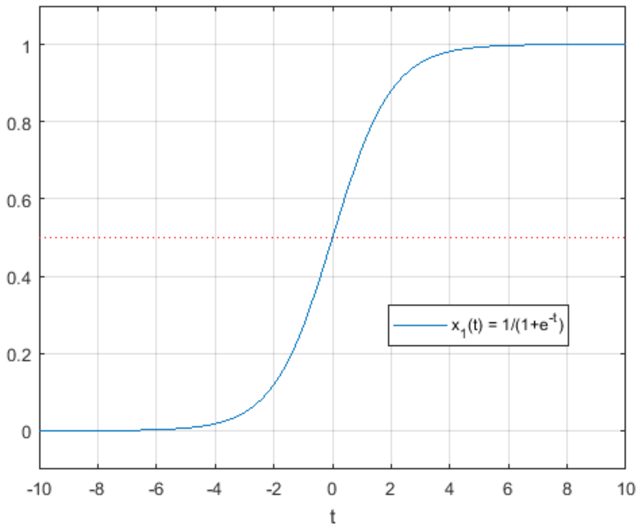

Figura 28. Representación gráfica de $x_1(t)$ y su nivel de *offset*.

b) Vemos que $x_2[n]$ es una versión digitalizada (muestreada, de hecho, tal y como se expresa en la ecuación (3), a razón de $T_m = 1$) de la señal analógica polinómica de la Figura 24 en el Ejemplo 10. Si observamos su representación gráfica, ya se intuye que su *offset* tenderá a $+\infty$, puesto que la señal crece indefinidamente tanto para valores muy positivos como muy negativos de la variable independiente:

$$\mu_2 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x_2[n] = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} \left(\frac{1}{4}n^4 - \frac{1}{2}n^2\right) =$$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \left(\frac{1}{4} \sum_{n=-N}^{N} n^4 - \frac{1}{2} \sum_{n=-N}^{N} n^2\right) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \left(\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} n^4 - \sum_{n=1}^{N} n^2\right) \tag{185}$$

Al llegar a este punto, se observa que $\sum_{n=1}^{N} n^4$ y $\sum_{n=1}^{N} n^2$ son **sumatorios de potencias**. Para un repaso rápido sobre sumatorios de potencias, se recomienda consultar el Anexo de este módulo.

Por tanto, puesto que estamos en un límite para $N \to \infty$, aplicamos los términos dominantes de $\sum_{n=1}^{N} n^4$ y $\sum_{n=1}^{N} n^2$ para completar el cálculo del *offset* de $x_2[n]$ (α_1 y α_2 son constantes cuyos valores son irrelevantes):

$$\mu_2 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1}\left(\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} n^4 - \sum_{n=1}^{N} n^2\right) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1}\left(\frac{1}{2}\alpha_1 N^5 - \alpha_2 N^3\right) =$$
$$\lim_{N\to\infty} \frac{\frac{\alpha_1}{2}N^5 - \alpha_2 N^3}{2N+1} = \lim_{N\to\infty} \frac{\frac{\alpha_1}{2}N^5}{2N} = \lim_{N\to\infty} \frac{\alpha_1}{4}N^4 \to +\infty \tag{186}$$

Y por otra parte, observando la representación gráfica de $x_2[n]$, también se intuye claramente que su *offset* en $n \in \{0, \dots, 99\}$ será un valor muy elevado, pero finito:

$$\mu_{2_0}^{99} = \frac{1}{n_2 - n_1 + 1}\sum_{n=n_1}^{n_2} x_2[n] = \frac{1}{100}\sum_{n=0}^{99}\left(\frac{1}{4}n^4 - \frac{1}{2}n^2\right) =$$
$$\frac{1}{100}\left(\frac{1}{4}\left(\sum_{n=1}^{99} n^4 + 1\right) - \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{99} n^2 + 1\right)\right) =$$
$$\frac{1}{100}\left(\frac{1}{4}\left(\frac{99^5}{5} + \frac{99^4}{2} + \frac{99^3}{3} - \frac{99}{30} + 1\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{99^3}{3} + \frac{99^2}{2} + \frac{99}{6} + 1\right)\right) = \tag{187}$$
$$\frac{1}{100}\left(\frac{99^5}{20} + \frac{99^4}{8} + \frac{99^3}{12} - \frac{99}{120} + \frac{1}{4} - \frac{99^3}{6} - \frac{99^2}{4} - \frac{99}{12} - \frac{1}{2}\right) =$$
$$\frac{1}{100}\left(\frac{99^5}{20} + \frac{99^4}{8} - \frac{99^3}{12} - \frac{99^2}{4} - \frac{1089}{120} - \frac{1}{4}\right) \cong 4.87 \cdot 10^6$$

c) Vemos que $x_3[n]$ es la señal representada gráficamente en color azul en la Figura 7 del Ejemplo 2. Si observamos su representación gráfica, ya se intuye que su *offset* será igual a 1, puesto que se trata de una recta discretizada cuya ordenada en el origen es 1:

$$\mu_3 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}(1+2n) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1}\left(\sum_{n=-N}^{N} 1 + \sum_{n=-N}^{N} 2n\right) \tag{188}$$

Al llegar a este punto, se observa que $\sum_{n=-N}^{N} 1$ y $\sum_{n=-N}^{N} 2n$ son dos series aritméticas de diferencias 0 y 2, respectivamente. Para un repaso rápido sobre series aritméticas, se recomienda consultar el Anexo de este módulo.

Por tanto, ya sabemos cómo calcular $\sum_{n=-N}^{N} 1$ y $\sum_{n=-N}^{N} 2n$:

$$\sum_{n=-N}^{N} 1 = \frac{N-(-N)+1}{2}(1+1) = 2N+1 \tag{189}$$

$$\sum_{n=-N}^{N} 2n = \frac{N-(-N)+1}{2}(-2N+2N) = 0 \tag{190}$$

Así, retomando la ecuación (188) y aplicando los resultados obtenidos en (189) y (190), ya podemos completar el cálculo de μ_3:

$$\mu_3 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1}\left(\sum_{n=-N}^{N} 1 + \sum_{n=-N}^{N} 2n\right) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1}(2N+1) = \lim_{N\to\infty} 1 = 1 \qquad (191)$$

Y respecto al *offset* de $x_3[n]$ en $n \in \{0, \dots, 99\}$:

$$\begin{aligned} \mu_{3\,0}^{\ 99} &= \frac{1}{100}\sum_{n=0}^{99}(1+2n) = \frac{1}{100}\left(\sum_{n=0}^{99} 1 + \sum_{n=0}^{99} 2n\right) = \\ &\frac{1}{100}\left(\frac{100}{2}(1+1) + \frac{100}{2}(0+198)\right) = 1 + \frac{198}{2} = 100 \end{aligned} \qquad (192)$$

Y para finalizar, representamos gráficamente $x_3[n]$, indicando en la gráfica su nivel de *offset*:

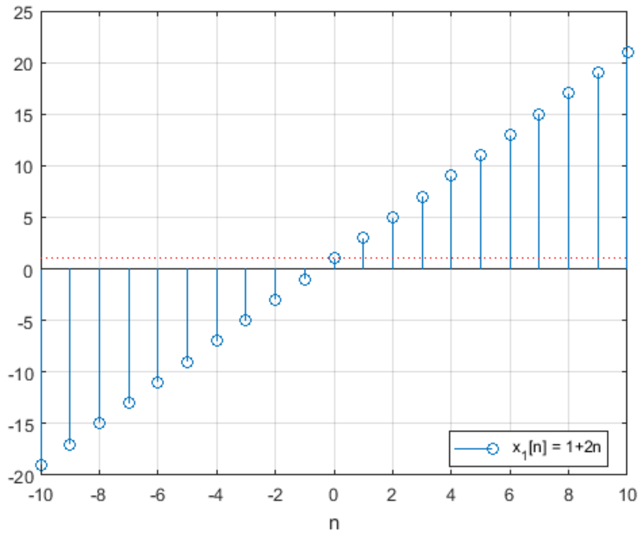

Figura 29. Representación gráfica de $x_3[n]$ y su nivel de *offset*.

d) Vemos que $x_4[n]$ es una señal digital definida en dos intervalos. Lo primero que hacemos es representar gráficamente la señal:

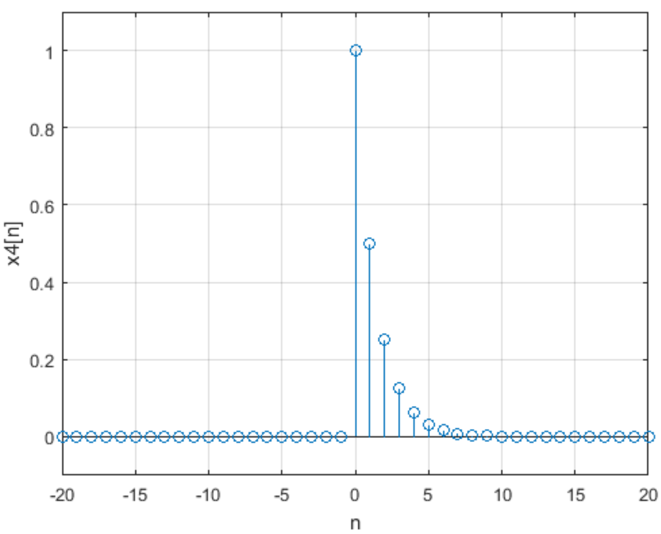

Figura 30. Representación gráfica de $x_4[n]$.

Se observa que $x_4[n]$ vale 0 para todo valor negativo de n, y que, desde $n = 0$ y a medida que n aumenta, tiende asintóticamente a 0 al ritmo de una exponencial decreciente. Así, podemos intuir que su *offset* será un valor finito entre 0 y 1 (de hecho, muy probablemente, será igual a 0):

$$\begin{aligned}\mu_4 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x_4[n] = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \left(\sum_{n=-N}^{-1} 0 + \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{1}{2}\right)^n \right) = \\ \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{1}{2}\right)^n\end{aligned} \tag{193}$$

Al llegar a este punto, se observa que $\sum_{n=0}^{N}(1/2)^n$ es una serie geométrica de razón $1/2$. Para un repaso rápido sobre series geométricas, se recomienda consultar el Anexo de este módulo.

Por tanto, ya sabemos cómo calcular $\sum_{n=0}^{N}(1/2)^n$:

$$\sum_{n=0}^{N} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^N}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{N+1}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1 - \frac{1}{2^{N+1}}}{\frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^N} \tag{194}$$

Así, aplicando en (193) el resultado de (194), ya podemos completar el cálculo de μ_4:

$$\mu_4 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \left(2 - \frac{1}{2^N}\right) = \lim_{N\to\infty} \frac{2}{2N+1} = 0 \tag{195}$$

Y, ahora, calculamos el *offset* de $x_4[n]$ en $n \in \{0, \dots, 99\}$:

$$\mu_{4_0}^{99} = \frac{1}{100} \sum_{n=0}^{99} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{100} \left(\frac{1 - {}^1\!/_2 \left({}^1\!/_2\right)^{99}}{1 - {}^1\!/_2} \right) = \frac{1}{50} \left(1 - \frac{1}{2^{100}}\right) \cong 0.02 \tag{196}$$

Y, en último lugar, añadimos el nivel de *offset* de $x_4[n]$ a su representación gráfica:

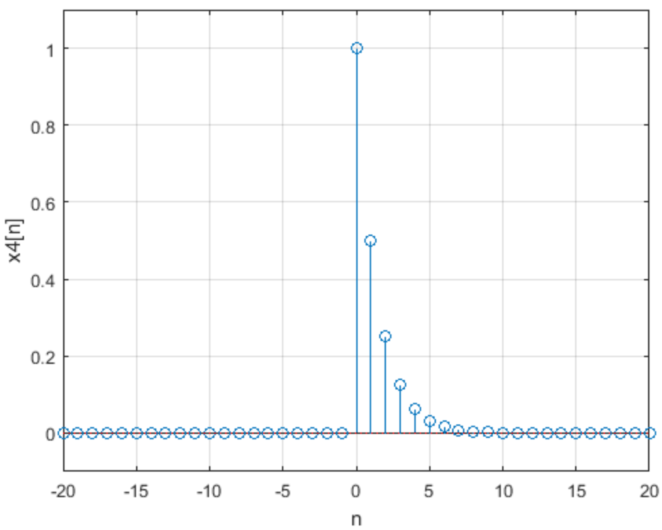

Figura 31. Representación gráfica de $x_4[n]$ y su nivel de *offset*.

Finalmente, para acabar este apartado, se comenta qué efectos tienen las operaciones de **desplazamiento vertical** y **escalado en amplitud** de una señal, así como las **transformaciones de su variable independiente**, sobre su *offset*.

Siendo $x(t)$ y $x[n]$ dos señales cualesquiera de *offset* μ_x; K una constante; t_0 y a constantes reales positivas; n_0 una constante entera positiva; y b una constante racional positiva:

Sumarle una constante a una señal implica sumarle esa constante a su *offset* (ver *Demostración 2* en el Anexo de este módulo):

$$y(t) = x(t) + K \implies \mu_y = \mu_x + K \tag{197}$$

$$y[n] = x[n] + K \implies \mu_y = \mu_x + K \tag{198}$$

Sumarle una constante K a una señal implica desplazarla. Este desplazamiento vertical de toda la señal (que, recordemos, no modifica su forma, sino únicamente su ubicación vertical) hace que su *offset* (es decir, el valor de amplitud respecto del cual está centrada verticalmente la señal) se desplace también en esa misma medida.

Multiplicar una señal por una constante (es decir, escalar en amplitud una señal) implica multiplicar su *offset* por esa constante (ver *Demostración 3* en el Anexo de este módulo):

$$y(t) = Kx(t) \implies \mu_y = K\mu_x \tag{199}$$

$$y[n] = Kx[n] \implies \mu_y = K\mu_x \tag{200}$$

Se observa que escalar en amplitud una señal siempre provocará que el *offset* de la misma (es decir, el valor de amplitud respecto del cual está centrada verticalmente la señal) se vea modificado (salvo en el caso particular en que el *offset* de la señal original sea igual a 0, puesto que, si $\mu_x = 0$, entonces $\mu_y = K\mu_x = 0$).

Sumar (o restar) una constante a la variable independiente no modifica el *offset* de la señal:

$$y(t) = x(t \pm t_0) \implies \mu_y = \mu_x \tag{201}$$

$$y[n] = x[n \pm n_0] \implies \mu_y = \mu_x \tag{202}$$

Este caso es trivial: en la medida en que sumar (o restar) una constante a la variable independiente no implica más que desplazar horizontalmente la señal, su *offset* no se verá modificado por esta transformación.

Cambiarle el signo a la variable independiente no modifica el *offset* de la señal:

$$y(t) = x(-t) \implies \mu_y = \mu_x \tag{203}$$

$$y[n] = x[-n] \implies \mu_y = \mu_x \tag{204}$$

Análogamente, reflejar horizontalmente una señal tampoco modifica su *offset*, puesto que el valor de amplitud al que esté centrada verticalmente la señal no variará por el hecho de reflejarla 180° respecto del eje de ordenadas.

Multiplicar por una constante la variable independiente de una señal analógica no modifica su *offset*:

$$y(t) = x(at) \implies \mu_y = \mu_x \tag{205}$$

Multiplicar por una constante la variable independiente de una señal digital sí puede modificar su *offset*:

$$y[n] = x[bn] \nRightarrow \mu_y = \mu_x \tag{206}$$

En el caso analógico, el escalado de la variable independiente «estira» o «comprime» horizontalmente la señal original (recordemos el símil nemotécnico del acordeón), por lo que el valor de amplitud al cual esté centrada verticalmente la señal (esto es, su *offset*) no se verá modificado por esta transformación.

En el caso digital, por el contrario, esto no es así, puesto que en el diezmo se eliminan directamente muestras de la señal original y en la inserción de ceros se le añaden nuevas muestras (de amplitud 0) a la señal original, de modo que el resultado de la suma de todos los valores de amplitud de la señal (o sea, su *offset*) bien puede variar a consecuencia de esta transformación. Imaginemos, por ejemplo, la señal digital continua $x[n] = 1$: su *offset* es claramente $\mu_x = 1$, pero, si le inserimos un 0 entre muestra y muestra, se convierte en la señal $y[n] = x[n/2] = [\dots 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0 \dots]$, cuyo *offset* es $\mu_y = 1/2$.

6.3. Energía y potencia media de una señal

La **energía** de una señal se define como **la suma de los cuadrados de los valores absolutos de los valores de amplitud de la señal**:

$$E_x \triangleq \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \qquad (207)$$

$$E_x \triangleq \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 \qquad (208)$$

allí donde E_x es la energía de $x(t)$ en la ecuación (207), y de $x[n]$ en la ecuación (208).

Se observa que, tanto en la definición del caso analógico como en la del digital, el cálculo de la energía de una señal es similar al de su *offset*, con dos salvedades:

- La suma se hace sobre los cuadrados de los valores de amplitud de la señal en valor absoluto. Por tanto, **la energía de una señal nunca podrá ser negativa ($E_x \geq 0$)**. Además, el hecho de elevar al cuadrado un valor absoluto puede parecer una redundancia innecesaria, pero en general no lo es si se asume que las señales pueden ser complejas (más sobre esta cuestión en el apartado 5.1 de este mismo módulo).
- Al calcular la energía, se hace solo una suma y no un promedio, lo cual permite **relajar la notación matemática**: se pueden trasladar los ∞ a los límites de la integral y el sumatorio y, de este modo, obviar los límites.

La **potencia media** de una señal se define como **el promedio de los cuadrados de los valores absolutos de los valores de amplitud de la señal**:

$$P_x \triangleq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt = \lim_{T\to\infty} \frac{E_x}{2T} \qquad (209)$$

$$P_x \triangleq \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{E_x}{2N+1} \qquad (210)$$

allí donde P_x y E_x son, respectivamente, la potencia media y la energía de $x(t)$ en la ecuación (209), y las de $x[n]$ en la ecuación (210).

Análogamente, aquí se observa que el cálculo de la potencia media de una señal es aún más similar si cabe al de su *offset* (en ambos casos se calcula un promedio), de modo que aquí ya no podemos obviar los límites.

Además, también se observa la estrecha relación que hay entre la energía y la potencia media, puesto que **la potencia media no es más que la energía por unidad de tiempo**. Por tanto, vemos también que **la potencia media de una señal nunca podrá ser negativa ($P_x \geq 0$)**.

Es importante notar que de las ecuaciones (209) y (210) se sigue que, en función de los valores que adopten su energía y su potencia media, toda señal (tanto analógica como digital) puede ser clasificada en alguna de las tres clases siguientes:

- Si la energía de la señal es finita ($E_x < \infty$), entonces su potencia media es igual a 0.
- Si la potencia media de la señal es finita y distinta de 0 ($0 < P_x < \infty$), entonces su energía es infinita ($E_x \to \infty$).
- Si la potencia media de la señal es infinita ($P_x \to \infty$), entonces su energía también es infinita ($E_x \to \infty$).

Esta clasificación queda resumida en la siguiente tabla:

		Potencia media	
		Finita	**Infinita**
Energía	**Finita**	$E_x < \infty$, $P_x = 0$	Imposible
	Infinita	$E_x \to \infty$, $0 < P_x < \infty$	$E_x \to \infty$, $P_x \to \infty$

Tabla 3. Clases de señales en función de los valores que adopten su energía (E_x) y su potencia media (P_x).

Asimismo, también puede calcularse **la energía y la potencia media de una señal en un intervalo finito** de tiempo, con lo que las ecuaciones de cálculo se simplifican ligeramente:

$$E_{x_{t_1}}^{t_2} \triangleq \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt \tag{211}$$

$$E_{x_{n_1}}^{n_2} \triangleq \sum_{n=n_1}^{n_2} |x[n]|^2 \tag{212}$$

$$P_{x_{t_1}}^{t_2} \triangleq \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt = \frac{E_{x_{t_1}}^{t_2}}{t_2 - t_1} \tag{213}$$

$$P_{x_{n_1}}^{n_2} \triangleq \frac{1}{n_2 - n_1 + 1} \sum_{n=n_1}^{n_2} |x[n]|^2 = \frac{E_{x_{n_1}}^{n_2}}{n_2 - n_1 + 1} \tag{214}$$

allí donde $E_{x_{t_1}}^{t_2}$ y $P_{x_{t_1}}^{t_2}$ son, respectivamente, la energía y la potencia media de $x(t)$ en el intervalo $t \in [t_1, t_2]$; y $E_{x_{n_1}}^{n_2}$ y $P_{x_{n_1}}^{n_2}$ son, respectivamente, la energía y la potencia media de $x[n]$ en el intervalo $n \in \{n_1, \dots, n_2\}$.

En este sentido, en el caso de trabajar con **señales periódicas**, se observa lo siguiente:

- **Toda señal periódica es de energía infinita**, puesto que, aunque la energía de su periodo básico sea finita, la energía total de la señal periódica será igual a la energía del periodo básico multiplicada por el número de periodos: dado que el número de periodos es infinito, la energía total será infinita.

- **La potencia media de toda señal periódica es igual a la potencia media de su periodo básico**; por tanto, la potencia media de una señal periódica sí puede ser finita, pues para ello solo se requiere que la potencia media de su periodo básico sea finita, lo cual es perfectamente posible, ya que el periodo básico es una señal finita.

En general, las definiciones de energía y potencia media de las ecuaciones (207)-(214) sirven indistintamente tanto para **señales reales** como para **señales complejas**. Aun así, en el caso de señales complejas, se puede también calcular la energía y la potencia media tanto de las señales parte real y parte imaginaria, como de las señales módulo y fase.

A continuación, se propone un ejercicio de cálculo de la energía y la potencia media de diferentes señales.

Ejemplo 12

Para cada una de las señales definidas en las ecuaciones (179)-(182) del Ejemplo 11, se pide calcular los siguientes parámetros:

- Su energía y su potencia media.
- Su energía y su potencia media en $t \in [0,2]$, si la señal es analógica.
- Su energía y su potencia media en $n \in \{0, \dots, 99\}$, si la señal es digital.

Solución

Para una versión extendida y detallada del uso de MATLAB en la resolución de este ejercicio, se recomienda consultar el Anexo de este módulo.

a) Observando su representación gráfica en la Figura 22, ya intuimos que $x_1(t)$ tendrá energía infinita (puesto que $x_1(\mathrm{t} \to -\infty) \to 1$) y, muy probablemente, potencia media finita (puesto que $|x_1(\mathrm{t})| < 1$).

En todo caso, calculamos la energía de $x_1(t)$ mediante la ecuación (207):

$$E_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |x_1(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{1}{1+e^{-t}}\right|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{1+e^{-t}}\right)^2 dt =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{e^t}{1+e^t}\right)^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2t}}{(1+e^t)^2} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^t}{1+e^t} - \frac{e^t}{1+e^t} + \frac{e^{2t}}{(1+e^t)^2} dt =$$

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^t}{1+e^t} dt}_{\ln(1+e^t)} - \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^t}{1+e^t} - \frac{e^{2t}}{(1+e^t)^2} dt}_{\frac{e^t}{1+e^t}} = [\ln(1+e^t)]_{-\infty}^{+\infty} - \left[\frac{e^t}{1+e^t}\right]_{-\infty}^{+\infty} = \tag{215}$$

$$\underbrace{\ln(1+e^{\infty})}_{\infty} - \underbrace{\ln(1+e^{-\infty})}_{0} - \frac{e^{\infty}}{\underbrace{1+e^{\infty}}_{1}} + \frac{e^{-\infty}}{\underbrace{1+e^{-\infty}}_{0}} \to \infty$$

Y, para el cálculo de la potencia media de $x_1(t)$, partimos de la ecuación (209) y aprovechamos el cálculo de la integral que ya hemos realizado en (215):

$$P_1 = \lim_{T\to\infty}\frac{E_1}{2T} = \lim_{T\to\infty}\frac{[\ln(1+e^t)]_{-T}^{T} - \left[\frac{e^t}{1+e^t}\right]_{-T}^{T}}{2T} =$$
$$\lim_{T\to\infty}\frac{\ln(1+e^T) - \ln(1+e^{-T}) - \frac{e^T}{1+e^T} + \frac{e^{-T}}{1+e^{-T}}}{2T} =$$
$$\lim_{T\to\infty}\frac{\ln(1+e^T) - \ln\left(\frac{1+e^T}{e^T}\right) - \frac{e^T}{1+e^T} + \frac{1}{1+e^T}}{2T} = \lim_{T\to\infty}\frac{\ln(e^T) - \frac{1-e^T}{1+e^T}}{2T} = \tag{216}$$
$$\lim_{T\to\infty}\frac{T - \frac{1-e^T}{1+e^T}}{2T} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2} - \lim_{T\to\infty}\frac{1-e^T}{2T+2Te^T} = \frac{1}{2} - \lim_{T\to\infty}\frac{-e^T}{2Te^T} = \frac{1}{2}$$

Respecto de la energía y la potencia media de $x_1(t)$ en $t \in [0,2]$, claramente, ambos valores serán finitos. Calculamos ${E_1}_0^2$ a partir de la ecuación (211):

$${E_1}_0^2 = \int_{t_1}^{t_2} |x_1(t)|^2 dt = \int_0^2 |x_1(t)|^2 dt = [\ln(1+e^t)]_0^2 - \left[\frac{e^t}{1+e^t}\right]_0^2 =$$
$$\ln(1+e^2) - \ln(1+e^0) - \frac{e^2}{1+e^2} + \frac{e^0}{1+e^0} = \ln\left(\frac{1+e^2}{2}\right) - \frac{e^2}{1+e^2} + \frac{1}{2} \cong 1.0530 \tag{217}$$

Y calculamos ${P_1}_0^2$ a partir de la ecuación (213) y aprovechando el resultado obtenido en (217):

$${P_1}_0^2 = \frac{{E_1}_0^2}{2-0} = \frac{{E_1}_0^2}{2} = \frac{\ln\left(\frac{1+e^2}{2}\right) - \frac{e^2}{1+e^2} + \frac{1}{2}}{2} \cong 0.5265 \tag{218}$$

b) Observando la expresión de $x_2[n]$ en (180), ya intuimos que tanto su energía como su potencia media serán infinitas, puesto que la señal crece indefinidamente tanto para valores muy positivos como muy negativos de n. Calculamos la energía de $x_2[n]$ mediante la ecuación (208):

$$E_2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x_2[n]|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|\frac{1}{4}n^4 - \frac{1}{2}n^2\right|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}n^4 - \frac{1}{2}n^2\right)^2 =$$
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{16}n^8 - \frac{1}{4}n^6 + \frac{1}{4}n^4\right) = \frac{1}{16}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^8 - \frac{1}{4}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^6 + \frac{1}{4}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^4 = \tag{219}$$
$$\frac{1}{8}\sum_{n=1}^{+\infty} n^8 - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} n^6 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} n^4 \to \infty$$

Se ve claramente que el cálculo de la ecuación (219) tiende a infinito, debido a que hemos topado con tres sumatorios infinitos de potencias. El resultado total viene regido por el término dominante del sumatorio de la potencia de mayor grado (que es $\sum_{n=1}^{+\infty} n^8$), que sabemos que es de orden 9:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^8 = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} n^8 = \lim_{N\to\infty} \alpha N^9 \to \infty \tag{220}$$

Y calculamos la potencia media de $x_2[n]$ mediante la ecuación (210) y aprovechando el resultado ilustrado en (220):

$$P_2 = \lim_{N\to\infty} \frac{E_2}{2N+1} = \lim_{N\to\infty} \frac{\sum_{n=1}^{N} n^8}{2N+1} = \lim_{N\to\infty} \frac{\alpha N^9}{2N} = \lim_{N\to\infty} \frac{\alpha}{2} N^8 \to \infty \tag{221}$$

Respecto de la energía y la potencia media de $x_2[n]$ en $n \in \{0, \dots, 99\}$, claramente, ambos valores serán muy elevados, pero finitos. A fin de no repetir una y otra vez los mismos procedimientos, los calculamos directamente con MATLAB:

```
>> n = 0:1:99;
>> x2 = (1./4).*n.^4-(1./2).*n.^2;
>> sum(abs(x2).^2)

ans =

   6.6327e+15

>> mean(abs(x2).^2)

ans =

   6.6327e+13
```

Y, por tanto:

$$E_{2_0}^{99} = 6.63 \cdot 10^{15} \tag{222}$$

$$P_{2_0}^{99} = 6.63 \cdot 10^{13} \tag{223}$$

c) De nuevo, observando la expresión de $x_3[n]$ en (181), ya intuimos que tanto su energía como su potencia media también serán infinitas, puesto que $x_3[n]$ tampoco está acotada en amplitud. Y también que su energía y su potencia media en $n \in \{0, \dots, 99\}$ serán, de nuevo, valores muy elevados, pero finitos.

Así, calcularemos directamente los cuatro parámetros con MATLAB:

```
>> syms m N integer;
>> symsum((1+2*m)^2,m,-Inf,+Inf)

ans =

Inf

>> limit(symsum((1+2*m)^2,m,-N,+N)/(2*N+1),N,+Inf)

ans =

Inf

>> n = 0:1:99;
>> x3 = 1+2.*n;
>> sum(abs(x3).^2)

ans =

    1333300

>> mean(abs(x3).^2)

ans =

    13333
```

Y, por tanto:

$$E_3 \to \infty \tag{224}$$

$$P_3 \to \infty \tag{225}$$

$$E_{3_0}^{99} = 1333300 \tag{226}$$

$$P_{3_0}^{99} = 13333 \tag{227}$$

d) En el caso de $x_4[n]$, definida por intervalos en la ecuación (182), vemos que sí está acotada en amplitud y, además, que tiende a 0 a medida que n tiende a ∞ a ritmo de una exponencial decreciente. Esto nos permite intuir que se trata de una señal cuya energía es finita y, por lo tanto, según lo indicado en la Tabla 3, cuya potencia media será igual a 0.

Empezamos calculando la energía de $x_4[n]$:

$$E_4 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x_4[n]|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \left|\left(\frac{1}{2}\right)^n\right|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{4}{3} \tag{228}$$

Se observa que $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n$ es una serie geométrica infinita de razón $\frac{1}{4}$. Y **toda serie geométrica infinita converge a un resultado finito si el valor absoluto de su razón es menor que 1 ($|r| < 1$)**. Esto se debe a que el último término de la serie es la razón elevada a ∞, y, si el valor absoluto de la razón es menor que 1, ese término se anula:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1 - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{\infty}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3} \tag{229}$$

Y, así, la potencia media de $x_4[n]$ es:

$$P_4 = \lim_{N\to\infty} \frac{E_4}{2N+1} = \lim_{N\to\infty} \frac{\frac{4}{3}}{2N+1} = 0 \tag{230}$$

Para acabar, obtenemos con MATLAB la energía y la potencia media de $x_4[n]$ en $n \in \{0, \dots, 99\}$:

```
>> n = 0:1:99;
>> x4 = (1./2).^n;
>> sum(abs(x4).^2)

ans =

    1.3333

>> mean(abs(x4).^2)

ans =

    0.0133
```

Así pues:

$$E_{4_0}^{99} \cong 1.3333 \tag{231}$$

$$P_{4_0}^{99} \cong 0.0133 \tag{232}$$

Finalmente, para acabar este apartado, se comenta qué efectos tienen las operaciones de **desplazamiento vertical** y **escalado en amplitud** de una señal, así como las **transformaciones de su variable independiente**, sobre su energía y su potencia media.

Siendo $x(t)$ y $x[n]$ dos señales cualesquiera de energía E_x y potencia media P_x; K una constante; t_0 y a constantes reales positivas; n_0 y L constantes enteras positivas; y b una constante racional positiva:

Sumarle una constante a una señal sí puede modificar tanto su energía como su potencia media:

$$y(t) = x(t) + K \;\not\Rightarrow\; \begin{cases} E_y = E_x \\ P_y = P_x \end{cases} \tag{233}$$

$$y[n] = x[n] + K \;\not\Rightarrow\; \begin{cases} E_y = E_x \\ P_y = P_x \end{cases} \tag{234}$$

Tomemos, por ejemplo, la señal analógica continua $x(t) = 1$: su energía es claramente infinita ($E_x \longrightarrow \infty$) y su potencia media es unitaria ($P_x = 1$). Si le sumamos una constante de, por ejemplo, valor 2, obtenemos una nueva señal $y(t) = x(t) + 2 = 3$ cuya energía sigue siendo infinita ($E_y \longrightarrow \infty$) y cuya potencia media es $P_y = 9$. Así pues, vemos que, en el caso de este desplazamiento vertical, la energía no se ve modificada ($E_y = E_x$) y la potencia media sí ($P_y \neq P_x$).

Tomemos ahora una señal de longitud finita tal como una señal analógica $x(t)$ de amplitud 1 para $-1 \leq t \leq 1$ y de amplitud 0 para el resto de valores de t, cuya su energía es finita ($E_x = 2$) y cuya potencia media es nula ($P_x = 0$). Si ahora le sumamos una constante de valor 2, obtenemos una nueva señal $y(t) = x(t) + 2$, que es de amplitud 3 para $-1 \leq t \leq 1$ y de amplitud 2 para el resto de valores de t. En este caso, el desplazamiento vertical aplicado a $x(t)$ provoca que tanto la energía ($E_y \longrightarrow \infty$) como la potencia media ($P_y = 4$) aumenten.

Multiplicar una señal por una constante (es decir, escalar en amplitud una señal) implica multiplicar tanto su energía como su potencia media por el cuadrado del valor absoluto de esa constante (ver *Demostración 4* en el Anexo de este módulo):

$$y(t) = Kx(t) \;\Longrightarrow\; \begin{cases} E_y = |K|^2 E_x \\ P_y = |K|^2 P_x \end{cases} \tag{235}$$

$$y[n] = Kx[n] \;\Longrightarrow\; \begin{cases} E_y = |K|^2 E_x \\ P_y = |K|^2 P_x \end{cases} \tag{236}$$

Sumar (o restar) una constante a la variable independiente no modifica ni la energía ni la potencia media de la señal (ver *Demostración 5* en el Anexo de este módulo):

$$y(t) = x(t \pm t_0) \implies \begin{cases} E_y = E_x \\ P_y = P_x \end{cases} \tag{237}$$

$$y[n] = x[n \pm n_0] \implies \begin{cases} E_y = E_x \\ P_y = P_x \end{cases} \tag{238}$$

Cambiarle el signo a la variable independiente no modifica ni la energía ni la potencia media de la señal (ver *Demostración 6* en el Anexo de este módulo):

$$y(t) = x(-t) \implies \begin{cases} E_y = E_x \\ P_y = P_x \end{cases} \tag{239}$$

$$y[n] = x[-n] \implies \begin{cases} E_y = E_x \\ P_y = P_x \end{cases} \tag{240}$$

Multiplicar por una constante la variable independiente de una señal analógica sí puede modificar su energía, pero no modifica su potencia media (ver *Demostración 7* en el Anexo de este módulo):

$$y(t) = x(at) \nRightarrow E_y = E_x \tag{241}$$

$$y(t) = x(at) \implies P_y = P_x \tag{242}$$

Multiplicar por una constante la variable independiente de una señal digital sí puede modificar tanto su energía como su potencia media:

$$y[n] = x[bn] \nRightarrow \begin{cases} E_y = E_x \\ P_y = P_x \end{cases} \tag{243}$$

Con una excepción: **la inserción de ceros no afecta a la energía de la señal**:

$$y[n] = x\left[\frac{n}{L}\right] \implies E_y = E_x \tag{244}$$

7. Señales típicas

En esta sección se presentan y caracterizan las señales más típicamente utilizadas en la práctica. En general, las señales que se definen y estudian aquí aparecen constantemente en la teoría de señales y sistemas. Sin embargo, la verdadera importancia de varias de estas señales (muy especialmente, las señales delta y las exponenciales complejas) no radica en su uso práctico, que también, sino en que, conceptualmente hablando, están en el corazón mismo de la teoría de señales y sistemas. Por tanto, resulta muy conveniente conocerlas al detalle, tener siempre bien presentes sus características y propiedades, y saber manejarlas con soltura.

7.1. Señal escalón unitario

La **señal escalón unitario** se define como aquella señal **cuya amplitud es 0 para valores negativos de su argumento y 1 para el resto**:

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad t < 0 \\ 1 & \text{para} \quad t \geq 0 \end{cases} \tag{245}$$

$$u[n] = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad n < 0 \\ 1 & \text{para} \quad n \geq 0 \end{cases} \tag{246}$$

siendo $u(t)$ el escalón unitario analógico ($t \in \mathbb{R}$) y $u[n]$ el digital ($n \in \mathbb{Z}$).

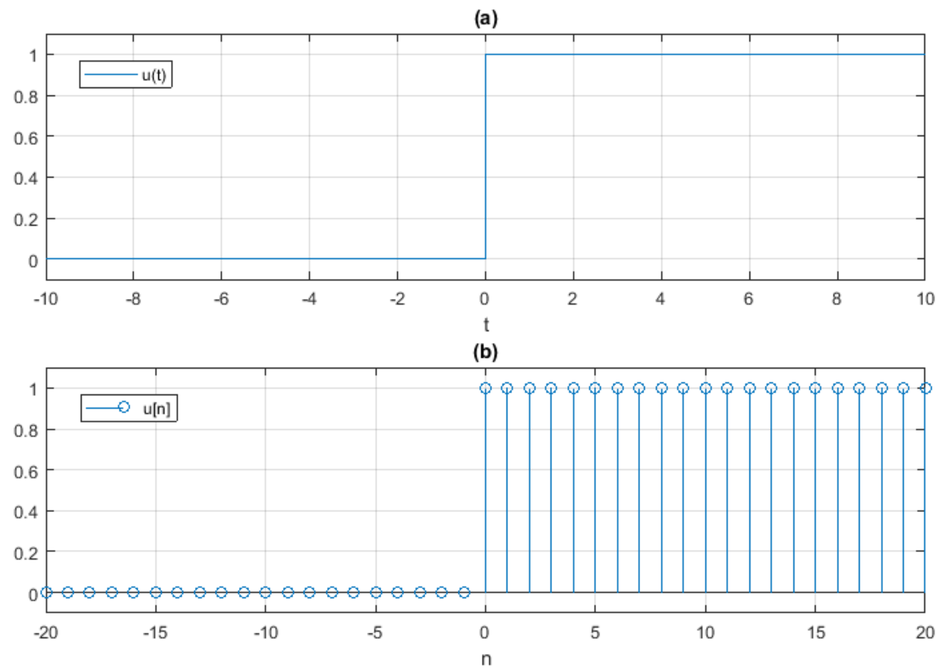

Figura 32. Representaciones gráficas de la señal escalón unitario: (a) $u(t)$; (b) $u[n]$.

En general, y dado que se trata de una de las dos o tres señales más habitualmente usadas en la práctica, **la letra u queda reservada para denotar la señal escalón unitario**.

A continuación, se propone un ejercicio de definición y representación gráfica de la señal escalón unitario sometida a transformaciones de desplazamiento, reflexión y escalado de su variable independiente.

Es muy importante **manejar con soltura las transformaciones de la variable independiente en la señal escalón unitario**. Este ejercicio ha de servir para ello:

Ejemplo 13

Se pide definir las siguientes señales:

a) $u(t-t_0)$ y $u[n-n_0]$, para $t_0, n_0 > 0$, siendo $t_0 \in \mathbb{R}$ y $n_0 \in \mathbb{Z}$.
b) $u(t+t_0)$ y $u[n+n_0]$, para $t_0, n_0 > 0$, siendo $t_0 \in \mathbb{R}$ y $n_0 \in \mathbb{Z}$.
c) $u(-t)$ y $u[-n]$.
d) $u(-t-t_0)$ y $u[-n-n_0]$, para $t_0, n_0 > 0$, siendo $t_0 \in \mathbb{R}$ y $n_0 \in \mathbb{Z}$.
e) $u(-t+t_0)$ y $u[-n+n_0]$, para $t_0, n_0 > 0$, siendo $t_0 \in \mathbb{R}$ y $n_0 \in \mathbb{Z}$.
f) $u(at)$ y $u[bn]$, para $a, b > 0$, siendo $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{Q}$.
g) $u(at-t_0)$ y $u[bn-n_0]$, para $a, b, t_0, n_0 > 0$, siendo $a, t_0 \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{Q}$ y $n_0 \in \mathbb{Z}$.

Además, también se pide representarlas para $t_0 = 5/2$, $n_0 = 7$, $a = 2$ y $b = 2/3$.

Solución

Para una versión extendida y detallada del uso de MATLAB en la resolución de este ejercicio, se recomienda consultar el Anexo de este módulo.

a) Definimos $u(t-t_0)$ y $u[n-n_0]$, para $t_0, n_0 > 0$, siendo $t_0 \in \mathbb{R}$ y $n_0 \in \mathbb{Z}$:

$$u(t-t_0) = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad (t-t_0) < 0 \\ 1 & \text{para} \quad (t-t_0) \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad t < t_0 \\ 1 & \text{para} \quad t \geq t_0 \end{cases} \tag{247}$$

$$u[n-n_0] = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad (n-n_0) < 0 \\ 1 & \text{para} \quad (n-n_0) \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad n < n_0 \\ 1 & \text{para} \quad n \geq n_0 \end{cases} \tag{248}$$

Como era de esperar, $u(t-t_0)$ y $u[n-n_0]$ no son sino $u(t)$ y $u[n]$ atrasadas t_0 segundos y n_0 muestras, respectivamente.

b) Definimos $u(t+t_0)$ y $u[n+n_0]$, para $t_0, n_0 > 0$, siendo $t_0 \in \mathbb{R}$ y $n_0 \in \mathbb{Z}$:

$$u(t+t_0) = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad (t+t_0) < 0 \\ 1 & \text{para} \quad (t+t_0) \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad t < -t_0 \\ 1 & \text{para} \quad t \geq -t_0 \end{cases} \tag{249}$$

$$u[n+n_0] = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad (n+n_0) < 0 \\ 1 & \text{para} \quad (n+n_0) \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad n < -n_0 \\ 1 & \text{para} \quad n \geq -n_0 \end{cases} \tag{250}$$

Como era de esperar, $u(t+t_0)$ y $u[n+n_0]$ no son sino $u(t)$ y $u[n]$ adelantadas t_0 segundos y n_0 muestras, respectivamente.

c) Definimos $u(-t)$ y $u[-n]$:

$$u(-t) = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad (-t) < 0 \\ 1 & \text{para} \quad (-t) \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad t > 0 \\ 1 & \text{para} \quad t \leq 0 \end{cases} \tag{251}$$

$$u[-n] = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad (-n) < 0 \\ 1 & \text{para} \quad (-n) \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad n > 0 \\ 1 & \text{para} \quad n \leq 0 \end{cases} \tag{252}$$

Como era de esperar, $u(-t)$ y $u[-n]$ no son sino resultantes de la reflexión horizontal de $u(t)$ y $u[n]$, respectivamente.

d) Definimos $u(-t-t_0)$ y $u[-n-n_0]$, para $t_0, n_0 > 0$, siendo $t_0 \in \mathbb{R}$ y $n_0 \in \mathbb{Z}$:

$$u(-t-t_0) = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad (-t-t_0) < 0 \\ 1 & \text{para} \quad (-t-t_0) \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad t > -t_0 \\ 1 & \text{para} \quad t \leq -t_0 \end{cases} \tag{253}$$

$$u[-n-n_0] = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad (-n-n_0) < 0 \\ 1 & \text{para} \quad (-n-n_0) \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad n > -n_0 \\ 1 & \text{para} \quad n \leq -n_0 \end{cases} \tag{254}$$

Vemos que **$u(-t-t_0)$ y $u[-n-n_0]$ son $u(-t)$ y $u[-n]$ adelantadas t_0 segundos y n_0 muestras, respectivamente**.

e) Definimos $u(-t+t_0)$ y $u[-n+n_0]$, para $t_0, n_0 > 0$, siendo $t_0 \in \mathbb{R}$ y $n_0 \in \mathbb{Z}$:

$$u(-t+t_0) = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad (-t+t_0) < 0 \\ 1 & \text{para} \quad (-t+t_0) \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad t > t_0 \\ 1 & \text{para} \quad t \leq t_0 \end{cases} \tag{255}$$

$$u[-n+n_0] = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad (-n+n_0) < 0 \\ 1 & \text{para} \quad (-n+n_0) \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad n > n_0 \\ 1 & \text{para} \quad n \leq n_0 \end{cases} \tag{256}$$

Vemos que **$u(-t+t_0)$ y $u[-n+n_0]$ son $u(-t)$ y $u[-n]$ atrasadas t_0 segundos y n_0 muestras, respectivamente**.

f) Definimos $u(at)$, para $a > 0$, siendo $a \in \mathbb{R}$:

$$u(at) = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad (at) < 0 \\ 1 & \text{para} \quad (at) \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad t < 0 \\ 1 & \text{para} \quad t \geq 0 \end{cases} = u(t) \tag{257}$$

Vemos que **$u(t)$ es insensible al escalado de su variable independiente**.

Ahora, definimos $u[bn]$, para $b = M$, siendo $M \in \mathbb{Z}$ y $M > 1$:

$$u[Mn] = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad (Mn) < 0 \\ 1 & \text{para} \quad (Mn) \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad n < 0 \\ 1 & \text{para} \quad n \geq 0 \end{cases} = u[n] \tag{258}$$

Vemos que **$u[n]$ es insensible al diezmo**.

Ahora, definimos $u[bn]$, para $b = 1/L$, siendo $L \in \mathbb{Z}$ y $L > 1$:

$$u\left[\frac{n}{L}\right] = \begin{cases} u[n/L] & \text{para } n \in \{m_i L\}, \forall m_i \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{para } n \notin \{m_i L\}, \forall m_i \in \mathbb{Z} \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{para } n \notin \{0, L, 2L, 3L, 4L \dots\} \\ 1 & \text{para } n \in \{0, L, 2L, 3L, 4L \dots\} \end{cases} \tag{259}$$

Por tanto, **$u[n/L]$ vale 1 en los múltiplos enteros de L mayores o iguales que 0, y 0 en el resto**.

Y, finalmente, definimos $u[bn]$, para $b = M/L$, siendo $M, L \in \mathbb{Z}$ con $M, L > 1$ y $M \neq L$. Por definición, sabemos que $u[(M/L)n]$ es el resultado de diezmar $u[n]$ en factor M y, después, inserirle bloques de $L-1$ ceros. Pero, como hemos visto en (258), el diezmo en factor M de $u[n]$ es igual a $u[n]$ ($u[Mn] = u[n]$), de modo que **$u[(M/L)n]$ es igual a $u[n/L]$**:

$$u\left[\frac{M}{L}n\right] = u\left[\frac{n}{L}\right] \tag{260}$$

g) Definimos $u(at-t_0)$ para $a, t_0 > 0$, siendo $a, t_0 \in \mathbb{R}$:

$$u(at-t_0)=\begin{cases}0 & \text{para} \quad (at-t_0)<0\\ 1 & \text{para} \quad (at-t_0)\geq 0\end{cases}=\begin{cases}0 & \text{para} \quad t<t_0/a\\ 1 & \text{para} \quad t\geq t_0/a\end{cases}=u\left(t-\frac{t_0}{a}\right) \qquad (261)$$

Vemos que $\boldsymbol{u(at-t_0)}$ **es** $\boldsymbol{u(t)}$ **atrasada** $\boldsymbol{t_0/a}$ **segundos**. Es importante notar que $u(at-t_0)$ es el resultado de, primero, atrasar t_0 segundos $u(t)$ y, después, escalar horizontalmente $u(t-t_0)$ en factor a. Si se invierte el orden de las transformaciones, escalando horizontalmente primero y atrasando después, se obtiene $u\big(a(t-t_0)\big)=u(t-t_0)$.

Ahora, definimos $u[bn-n_0]$, para $b=M$, siendo $M\in\mathbb{Z}$ y $M>1$, y $n_0>0$, siendo $n_0\in\mathbb{Z}$:

$$u[Mn-n_0]=\begin{cases}0 & \text{para} \quad (Mn-n_0)<0\\ 1 & \text{para} \quad (Mn-n_0)\geq 0\end{cases}=\begin{cases}0 & \text{para} \quad n<n_0/M\\ 1 & \text{para} \quad n\geq n_0/M\end{cases}=u\left[n-\left\lceil\frac{n_0}{M}\right\rceil\right] \qquad (262)$$

allí donde $\lceil n_0/M\rceil$ es el menor valor entero mayor o igual que n_0/M. Por tanto, vemos que $\boldsymbol{u[Mn-n_0]}$ **es** $\boldsymbol{u[n]}$ **atrasada** $\boldsymbol{\lceil n_0/M\rceil}$ **segundos**. Es importante notar que $u[Mn-n_0]$ es el resultado de, primero, atrasar n_0 muestras $u[n]$ y, después, diezmar $u[n-n_0]$ en factor M. Si se invierte el orden de las transformaciones, diezmando primero y atrasando después, se obtiene $u[M(n-n_0)]=u[n-n_0]$.

Ahora, definimos $u[bn-n_0]$, para $b=1/L$, siendo $L\in\mathbb{Z}$ y $L>1$, y $n_0>0$, siendo $n_0\in\mathbb{Z}$. Análogamente, aquí vemos que $u[(n/L)-n_0]$ es el resultado de, primero, atrasar n_0 muestras $u[n]$ y, después, inserirle bloques de $L-1$ ceros a $u[n-n_0]$. Tomando, pues, la definición de $u[n-n_0]$ en (248), vemos que $u[(n/L)-n_0]$ valdrá 0 para $n<Ln_0$ y, para $n\geq Ln_0$, valdrá 1 en $n\in\{Ln_0,Ln_0+L,Ln_0+2L,Ln_0+3L,Ln_0+4L\ldots\}$ y 0 en el resto (como resultado de la inserción de ceros). Así pues:

$$u\left[\frac{n}{L}-n_0\right]=\begin{cases}0 & \text{para} \quad n\notin\{Ln_0,L(n_0+1),L(n_0+2),L(n_0+3),L(n_0+4)\ldots\}\\ 1 & \text{para} \quad n\in\{Ln_0,L(n_0+1),L(n_0+2),L(n_0+3),L(n_0+4)\ldots\}\end{cases} \qquad (263)$$

Por tanto, vemos que $\boldsymbol{u[(n/L)-n_0]}$ **vale 1 en los múltiplos enteros de** $\boldsymbol{L}$ **mayores o iguales que** $\boldsymbol{Ln_0}$**, y 0 en el resto**. Y aquí también sucede que, si se invierte el orden de las transformaciones, insiriendo ceros primero y atrasando después, se obtiene $u[(n-n_0)/L]=u[(n/L)-(n_0/L)]$.

Y, finalmente, definimos $u[bn-n_0]$, para $b=M/L$, siendo $M,L\in\mathbb{Z}$ con $M,L>1$ y $M\neq L$, y $n_0>0$, siendo $n_0\in\mathbb{Z}$. Por (262), sabemos que $u[Mn-n_0]=u[n-\lceil n_0/M\rceil]$. Entonces, puesto que $u[(M/L)n-n_0]$ es el resultado de (en este orden) atrasar, diezmar e inserir ceros, sabemos que $u[(M/L)n-n_0]$ se obtiene insiriéndole bloques de $L-1$ ceros a $u[n-\lceil n_0/M\rceil]$. Por tanto, por (263), vemos que $\boldsymbol{u[(M/L)n-n_0]}$ **vale 1 en los múltiplos enteros de** $\boldsymbol{L}$ **mayores o iguales que** $\boldsymbol{L\lceil n_0/M\rceil}$**, y 0 en el resto**:

$$u\left[\frac{M}{L}n-n_0\right]=\begin{cases}0 & \text{para} \quad n\notin\{L\lceil n_0/M\rceil,L(\lceil n_0/M\rceil+1),L(\lceil n_0/M\rceil+2)\ldots\}\\ 1 & \text{para} \quad n\in\{L\lceil n_0/M\rceil,L(\lceil n_0/M\rceil+1),L(\lceil n_0/M\rceil+2)\ldots\}\end{cases} \qquad (264)$$

h) Para acabar, representamos gráficamente en la Figura 33 las señales definidas en los apartados anteriores para $t_0=5/2$, $n_0=7$, $a=2$ y $b=2/3$.

Finalmente, queda propuesto como ejercicio definir las siguientes señales (aplicando los mismos razonamientos vistos en los apartados anteriores) y también representarlas gráficamente para $t_0=5/2$, $n_0=7$, $a=2$ y $b=2/3$:

- $u(at+t_0)$ y $u[bn+n_0]$, para $a,b,t_0,n_0>0$, siendo $a,t_0\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{Q}$ y $n_0\in\mathbb{Z}$.
- $u(-at-t_0)$ y $u[-bn-n_0]$, para $a,b,t_0,n_0>0$, siendo $a,t_0\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{Q}$ y $n_0\in\mathbb{Z}$.
- $u(-at+t_0)$ y $u[-bn+n_0]$, para $a,b,t_0,n_0>0$, siendo $a,t_0\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{Q}$ y $n_0\in\mathbb{Z}$.

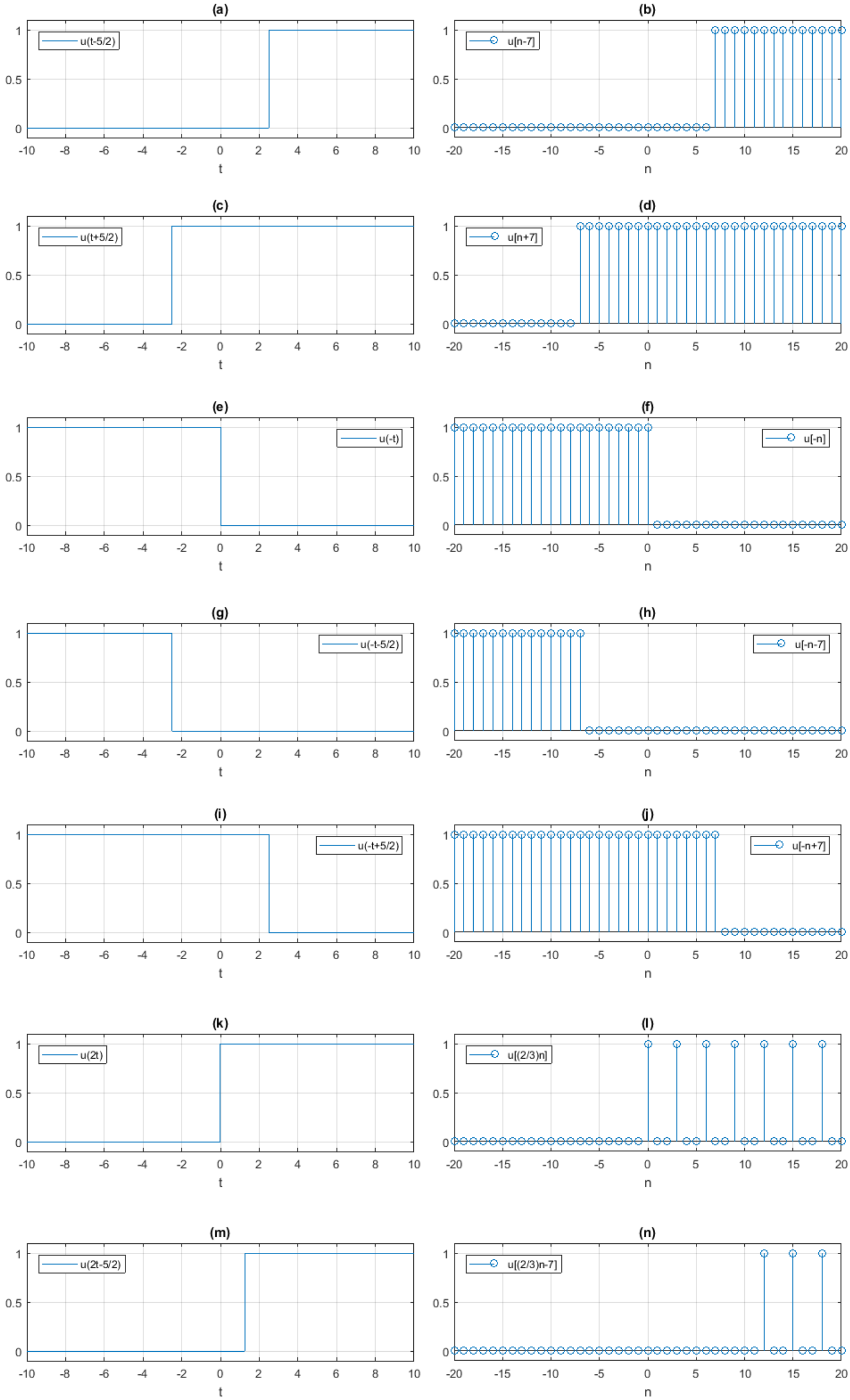

Figura 33. Representación gráfica de las señales del Ejemplo 13.

Ahora ya podemos ver una característica muy interesante de la señal escalón unitario, que no es otra que la de **expresar de forma compacta cualquier señal definida por intervalos**. Retomando las ecuaciones (51) y (52), se tiene que:

$$x(t)=\begin{cases} x_1(t) & \text{para} \quad t_1 \le t < t_2 \\ x_2(t) & \text{para} \quad t_2 \le t < t_3 \\ x_3(t) & \text{para} \quad t_3 \le t < t_4 \\ \vdots & \qquad\quad \vdots \\ x_M(t) & \text{para} \quad t_M \le t < t_{M+1} \end{cases} = \sum_{i=1}^{M} x_i(t)\big(u(t-t_i)-u(t-t_{i+1})\big) \tag{265}$$

$$x[n]=\begin{cases} x_1[n] & \text{para} \quad n_1 \le n < n_2 \\ x_2[n] & \text{para} \quad n_2 \le n < n_3 \\ x_3[n] & \text{para} \quad n_3 \le n < n_4 \\ \vdots & \qquad\quad \vdots \\ x_M[n] & \text{para} \quad n_M \le n < n_{M+1} \end{cases} = \sum_{i=1}^{M} x_i[n](u[n-n_i]-u[n-n_{i+1}]) \tag{266}$$

allí donde $\boldsymbol{u(t-t_i)-u(t-t_{i+1})}$ **y** $\boldsymbol{u[n-n_i]-u[n-n_{i+1}]}$ **acotan los intervalos** $\boldsymbol{i}$**-ésimos de** $\boldsymbol{x(t)}$ **y** $\boldsymbol{x[n]}$**, respectivamente, puesto que valen 1 en el interior del intervalo** $\boldsymbol{i}$**-ésimo y 0 fuera de él**, siendo que $t_i < t_{i+1}$ y $n_i < n_{i+1}$, $\forall i \in \{1,\dots,M\}$.

Un caso particular de este uso es el de la **definición de señales finitas**. Por ejemplo, para definir el periodo básico de una señal periódica. A tal efecto, retomamos las ecuaciones (118) y (119), donde se muestra cómo definir por intervalos el periodo básico, y vemos que:

$$x_0(t)=\begin{cases} x(t) & \text{para} \;\; t\in[0,T_0) \\ 0 & \text{para} \;\; t\notin[0,T_0) \end{cases} \Leftrightarrow \; x_0(t)=x(t)\big(u(t)-u(t-T_0)\big) \tag{267}$$

$$x_0[n]=\begin{cases} x[n] & \text{para} \;\; n\in\{0,\dots,N_0-1\} \\ 0 & \text{para} \;\; n\notin\{0,\dots,N_0-1\} \end{cases} \Leftrightarrow \; x_0[n]=x[n](u[n]-u[n-N_0]) \tag{268}$$

siendo $x_0(t)$ y $x_0[n]$ los periodos básicos de $x(t)$ y $x[n]$, respectivamente, las cuales son señales periódicas de periodo T_0 y N_0, respectivamente.

A continuación, se propone un ejercicio a fin de calcular los **parámetros básicos de la señal escalón unitario**:

Ejemplo 14

Se pide calcular el máximo, el mínimo, el supremo, el ínfimo, el *offset*, la energía y la potencia media de las señales $u(t)$ y $u[n]$.

Solución

Primero, determinamos los valores máximo, mínimo, supremo e ínfimo a partir de (245)-(246):

$$\begin{gathered} S_{u(t)}=S_{u[n]}=\max\big(u(t)\big)=\max(u[n])=1 \\ I_{u(t)}=I_{u[n]}=\min\big(u(t)\big)=\min(u[n])=0 \end{gathered} \tag{269}$$

Respecto del *offset*, si atendemos a la Figura 32, ya podemos intuir que será igual a $1/2$:

$$\mu_{u(t)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} u(t)dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{0}^{T} 1dt = \lim_{T\to\infty} \frac{[t]_0^T}{2T} = \lim_{T\to\infty} \frac{T-0}{2T} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\mu_{u[n]} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} u[n] = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=0}^{N} 1 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \frac{N+1}{2}(1+1) = \tag{270}$$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{N+1}{2N+1} = \lim_{N\to\infty} \frac{N}{2N} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

La energía es también infinita, pues la suma de infinitos valores iguales a 1 no converge:

$$E_{u(t)} = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} |u(t)|^2 dt = \lim_{T\to\infty} \int_{0}^{T} dt = \lim_{T\to\infty} [t]_0^T = \lim_{T\to\infty} (T-0) = \lim_{T\to\infty} T = \infty$$

$$E_{u[n]} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} |u[n]|^2 = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} 1 = \lim_{N\to\infty} \left(\frac{N+1}{2}(2)\right) = \lim_{N\to\infty} (N+1) = \infty \tag{271}$$

Y, finalmente, vemos que la potencia media del escalón unitario sí converge a un valor finito:

$$P_{u(t)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |u(t)|^2 dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{0}^{T} dt = \lim_{T\to\infty} \frac{[t]_0^T}{2T} = \lim_{T\to\infty} \frac{T}{2T} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$P_{u[n]} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |u[n]|^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=0}^{N} 1 = \lim_{N\to\infty} \frac{N+1}{2N+1} = \frac{1}{2} \tag{272}$$

Para terminar el estudio de la señal escalón unitario, destacaremos su relación con la **señal signo**, la cual se define como **aquella señal que adopta el valor del signo de su argumento**:

$$sgn(t) = \begin{cases} -1 & \text{para} \quad t < 0 \\ 0 & \text{para} \quad t = 0 \\ 1 & \text{para} \quad t > 0 \end{cases} \tag{273}$$

$$sgn[n] = \begin{cases} -1 & \text{para} \quad n < 0 \\ 0 & \text{para} \quad n = 0 \\ 1 & \text{para} \quad n > 0 \end{cases} \tag{274}$$

siendo $sgn(t)$ la señal signo analógica ($t \in \mathbb{R}$) y $sgn[n]$ la señal signo digital ($n \in \mathbb{Z}$).

Así, es fácil ver que **es posible construir la señal signo a partir de la señal escalón unitario**:

$$sgn(t) = u(t) - u(-t) \tag{275}$$

$$sgn[n] = u[n] - u[-n] \tag{276}$$

7.2. Señal delta analógica

La **señal delta analógica** (o **impulso unitario analógico**) se define como aquella señal analógica **cuya amplitud es infinita al anularse su argumento y 0 para el resto**:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad t \neq 0 \\ \infty & \text{para} \quad t = 0 \end{cases} \tag{277}$$

siendo $\delta(t)$ la señal delta analógica ($t \in \mathbb{R}$), también conocida como **delta de Dirac**[35].

En realidad, esta es una definición informal de la señal delta analógica, puesto que, en rigor matemático, su definición correcta es aquella que establece que **la delta de Dirac es la derivada del escalón unitario analógico**:

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt} \tag{278}$$

De la definición formal y rigurosa de (278) se sigue la más informal de (277), en la medida en que la derivada de $u(t)$ es igual a 0 para todo valor de t, salvo en $t = 0$, donde $u(t)$ no es derivable, puesto que presenta una discontinuidad de salto y, por tanto, una pendiente infinita. De hecho, estrictamente hablando, la delta de Dirac no es una función en los términos establecidos en (100), puesto que ∞ no es un número real, es decir, no es un elemento perteneciente al conjunto de los números reales ($\infty \notin \mathbb{R}$).

Viendo su definición, ya se intuye que la representación gráfica de $\delta(t)$ puede ser problemática en $t = 0$. Y, de hecho, lo es: dada la imposibilidad de representar gráficamente un valor de amplitud infinito, **la delta de Dirac se representa como igual a 0 y añadiendo una flecha vertical en el valor de la variable independiente para el cual se anula su argumento**:

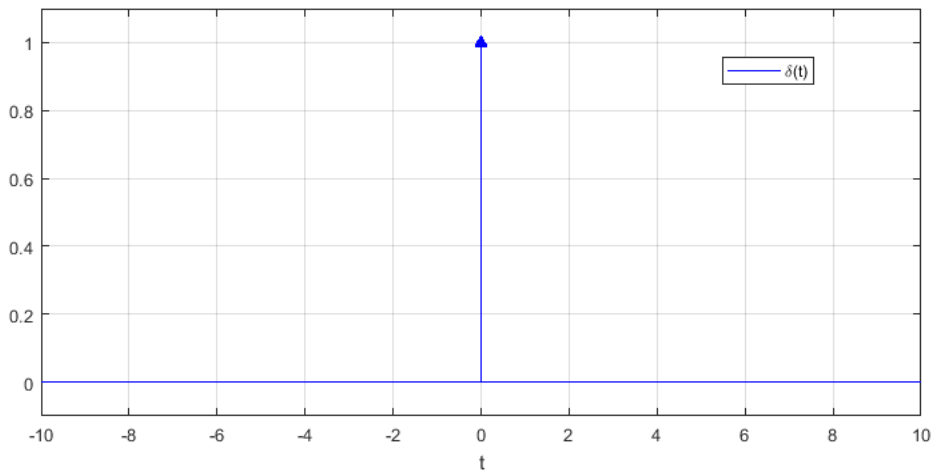

Figura 34. Representación gráfica de la señal delta de Dirac.

[35] Fue el físico francés Paul Dirac (1902-1984) quien introdujo por primera vez la «función delta» (hoy ya conocida como delta de Dirac) en su obra *Principios de la mecánica cuántica* (1930).

Entonces, **la amplitud y el sentido de la flecha vendrán siempre determinados por el factor de escala que acompañe a la delta**: $\delta(t), -\delta(t)$, $3\delta(t)$, $-\frac{1}{2}\delta(t)$, $A\delta(t)$, $-A\delta(t)$, etc. Incluso es posible, y hasta habitual, representar siempre una flecha de longitud 1 (pues la amplitud de la flecha es meramente testimonial), en un sentido u otro (dependiendo del signo del factor de escala), y añadirle una etiqueta numérica que indique la magnitud del factor de escala:

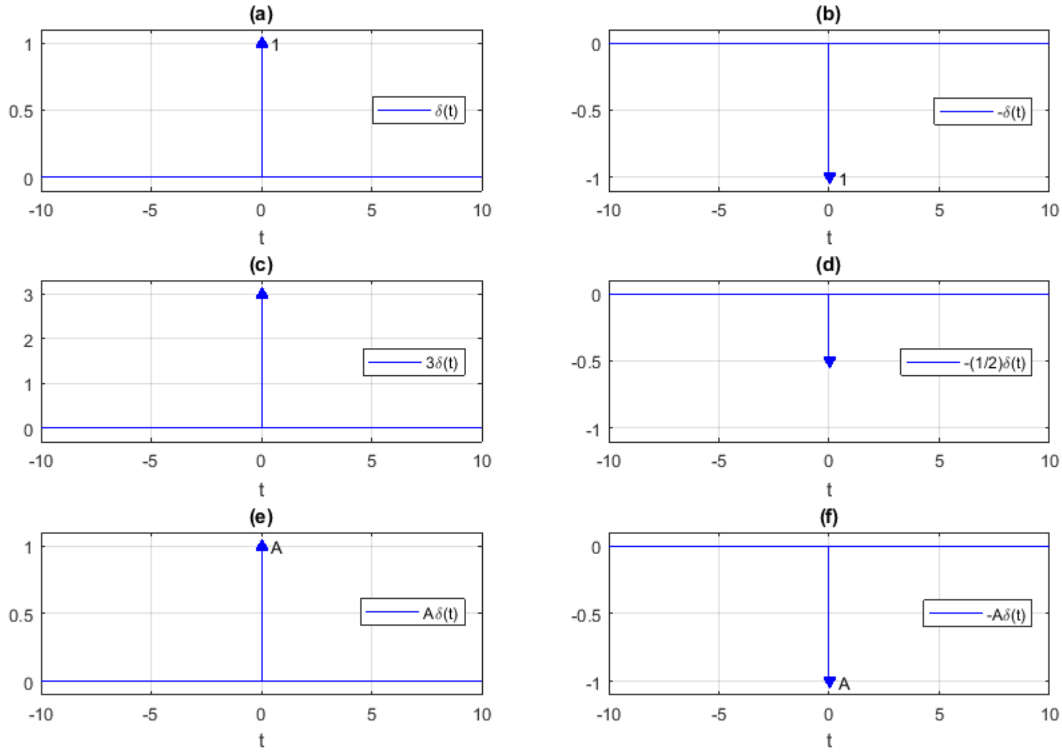

Figura 35. Ejemplos de representación gráfica de deltas de Dirac con diferentes factores de escala.

A continuación, se propone un pequeño ejercicio de representación gráfica de deltas de Dirac desplazadas horizontalmente y con diferentes factores de escala.

Ejemplo 15

Se pide representar gráficamente las siguientes señales analógicas, para $t_0 = 5/2$ y $A = 2$:

$$x_1(t) = \frac{A}{2}\delta(t + t_0) + A\delta(t) + \frac{A}{2}\delta(t - t_0) \tag{279}$$

$$x_2(t) = -\frac{A}{3}\delta(t + 2t_0) + \frac{A}{3}\delta(t - 2t_0) \tag{280}$$

Solución

Para una versión extendida y detallada del uso de MATLAB en la resolución de este ejercicio, se recomienda consultar el Anexo de este módulo.

La representación gráfica de $x_1(t)$ y $x_2(t)$:

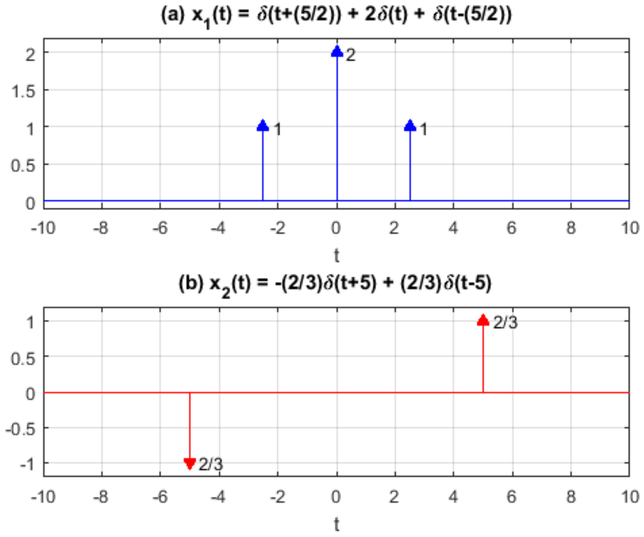

Figura 36. Representación gráfica de deltas de Dirac.

Se observa que, en la Figura 36(a), la longitud real de las flechas coincide con la magnitud del factor de escala, mientras que ese no es el caso en la Figura 36(b). En general, si se añade una etiqueta con la magnitud del factor de escala, es indiferente hacerlo de un modo o del otro.

A continuación, se detallan las **propiedades de la señal delta analógica**:

1. **Relación con la señal escalón unitario**:

$$\boxed{\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}} \tag{281}$$

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\sigma)d\sigma = \{\sigma = t - \tau\} = \int_{0}^{+\infty} \delta(t-\tau)d\tau \implies \boxed{u(t) = \int_{0}^{+\infty} \delta(t-\tau)d\tau} \tag{282}$$

2. **Insensibilidad al escalado de la variable independiente**:

$$\delta(at) = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad at \neq 0 \\ \infty & \text{para} \quad at = 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad t \neq 0 \\ \infty & \text{para} \quad t = 0 \end{cases} \implies \boxed{\delta(at) = \delta(t)} \tag{283}$$

Una importante consecuencia de esta propiedad es la siguiente:

$$\delta(at - t_0) = \delta\left(a\left(t - \frac{t_0}{a}\right)\right) = \left\{t' = t - \frac{t_0}{a}\right\} = \delta(at') = \delta(t') = \delta\left(t - \frac{t_0}{a}\right) \tag{284}$$

Por tanto:

$$\boxed{\delta(at - t_0) = \delta\left(t - \frac{t_0}{a}\right)} \tag{285}$$

3. **Insensibilidad a la reflexión horizontal sobre el eje de ordenadas**:

$$\delta(-t) = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad (-t) \neq 0 \\ \infty & \text{para} \quad (-t) = 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad t \neq 0 \\ \infty & \text{para} \quad t = 0 \end{cases} \implies \boxed{\delta(-t) = \delta(t)} \tag{286}$$

Una importante consecuencia de esta propiedad es la siguiente:

$$\delta(-t+t_0) = \delta\big(-(t-t_0)\big) = \{t' = t-t_0\} = \delta(-t') = \delta(t') = \delta(t-t_0) \qquad (287)$$

Por tanto:

$$\boxed{\delta(-t+t_0) = \delta(t-t_0)} \qquad (288)$$

4. **Ausencia de máximo y de supremo**; y además, **valores mínimo e ínfimo iguales a $\mathbf{0}$**:

$$\nexists S_{\delta(t)} \implies \nexists \max\big(\delta(t)\big) \qquad (289)$$

$$I_{\delta(t)} = \min\big(\delta(t)\big) = 0 \qquad (290)$$

5. ***Offset* igual a $\mathbf{0}$**:

$$\mu_{\delta(t)} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\delta(t)dt = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}[u(t)]_{-T}^{T} = \lim_{T\to\infty}\frac{1-0}{2T} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T} = 0 \qquad (291)$$

Una conclusión importante derivada del cálculo del *offset* es la siguiente:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt = 1} \qquad (292)$$

6. **Energía unitaria**:

$$E_{\delta(t)} = \lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}|\delta(t)|^2dt = \lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\delta(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt = 1 \qquad (293)$$

Y, como consecuencia, su potencia media es igual a 0:

$$P_{\delta(t)} = \lim_{T\to\infty}\frac{E_{\delta(t)}}{2T} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T} = 0 \qquad (294)$$

7. **Producto por una señal cualquiera**:

$$\boxed{x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0)} \qquad (295)$$

8. **Integral del producto por una señal cualquiera**:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\delta(t-t_0)dt = \int_{-\infty}^{+\infty}x(t_0)\delta(t-t_0)dt = x(t_0)\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)dt = x(t_0) \qquad (296)$$

Por tanto:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\delta(t-t_0)dt = x(t_0)} \qquad (297)$$

Y, para acabar, nótese que de (297) junto con (288) se sigue la que, muy probablemente, sea la característica más importante y de mayor calado de la señal delta analógica:

Toda señal analógica es el resultado de una combinación lineal de deltas de Dirac ponderadas por los valores de amplitud de la señal:

$$\boxed{x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau} \quad (298)$$

Conviene observar que, en (298), la variable τ no es más que la variable de integración, que se usa para recorrer la integral y poder hacer la suma. En realidad, la variable relevante en (298) es t, que, si nos fijamos, juega el mismo rol que la constante t_0 juega en (297). De hecho, podríamos reescribir (297) sustituyendo t por τ y el resultado seguiría siendo $x(t_0)$.

Lo importante aquí es darse cuenta de que (298) no consiste sino en calcular (297) infinitas veces: para $t_0 = 0$, para $t_0 = 0.1$, para $t_0 = 0.01$, para $t_0 = 2$, etc. Si calculamos (297) infinitas veces, cada una de ellas para un valor distinto de t_0, habremos obtenido $x(t)$ en su totalidad. Y eso es justamente lo que se hace en (298): sustituir la constante t_0 por la variable real t permite representar todos los posibles valores que podría adoptar t_0 en (297). Y, para evitar confusiones, la variable de integración en (298) se denota con τ, una letra distinta a t.

Aclarado esto, obsérvese que la señal $\delta(t-t_0)$ aporta toda su información (o sea, concentra toda su energía) en el instante t_0. Análogamente, $\delta(t-t_1)$ hace lo propio con t_1, y $\delta(t-t_2)$ con t_2, … y así podríamos cubrir todos los valores posibles de la variable t (cada uno de los instantes del tiempo continuo) mediante una delta de Dirac desplazada a cada uno de esos instantes. En general, $\boldsymbol{\delta(t-\tau)}$ **representa el conjunto infinito de deltas de Dirac que se requiere para cubrir todos los instantes posibles del tiempo continuo**. Si multiplicamos cada delta de Dirac que hay en $\delta(t-\tau)$ por un valor constante y las sumamos todas en una integral que recorra τ, estaremos construyendo una combinación lineal de deltas de Dirac que dará lugar a una señal analógica en t cuyos valores de amplitud serán las constantes que multiplican a cada una de las deltas de la combinación. O sea, habremos engendrado una señal analógica. Pues bien, eso es exactamente lo que sucede en (298): $x(t)$ es engendrada como resultado de una combinación lineal de deltas de Dirac. Es más, incluso tenemos ya un ejemplo concreto de esto: en (282), la señal $u(t)$ es engendrada como una combinación lineal de deltas de Dirac.

Por el momento, baste con darse cuenta del significado de (298) e intuir su gran importancia. En módulos posteriores, veremos que a la operación realizada en (298) se la conoce como la «convolución» entre $x(t)$ y $\delta(t)$, y veremos, también, la estrecha relación de todo esto con la noción de «transformada de una señal», que es fundamental en la teoría de señales y sistemas.

7.3. Señal delta digital

La **señal delta digital** (o **impulso unitario digital**) se define como aquella señal digital **cuya amplitud es 1 al anularse su argumento y 0 para el resto**:

$$\delta[n] = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad n \neq 0 \\ 1 & \text{para} \quad n = 0 \end{cases} \tag{299}$$

siendo $\delta[n]$ la señal delta digital ($n \in \mathbb{Z}$), también conocida como **delta discreta**.

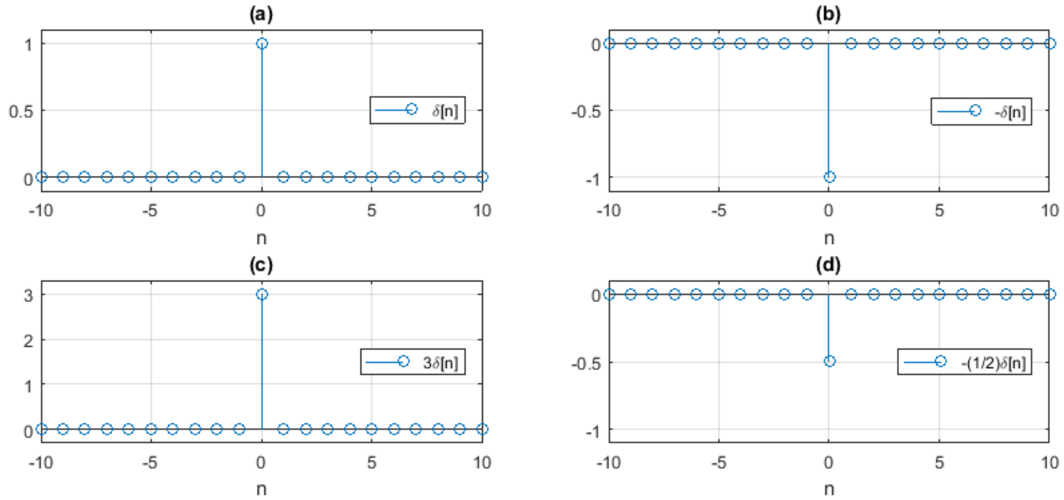

Figura 37. Ejemplos de representación gráfica de deltas discretas con diferentes factores de escala.

Contrariamente a lo que sucede con su homónima analógica, la definición de la señal delta digital no presenta ninguna dificultad y se ajusta sin más a la definición de función según (101). En la Figura 37 se muestra que su representación gráfica tampoco presenta problema alguno.

Ejemplo 16

Se pide representar gráficamente las siguientes señales digitales, para $n_0 = 3$ y $A = 2$:

$$x_1[n] = \frac{A}{2}\delta[n + n_0] + A\delta[n] + \frac{A}{2}\delta[n - n_0] \tag{300}$$

$$x_2[n] = -\frac{A}{3}\delta[n + 2n_0] + \frac{A}{3}\delta[n - 2n_0] \tag{301}$$

Solución

Para una versión extendida y detallada del uso de MATLAB en la resolución de este ejercicio, se recomienda consultar el Anexo de este módulo.

La representación gráfica de $x_1[n]$ y $x_2[n]$:

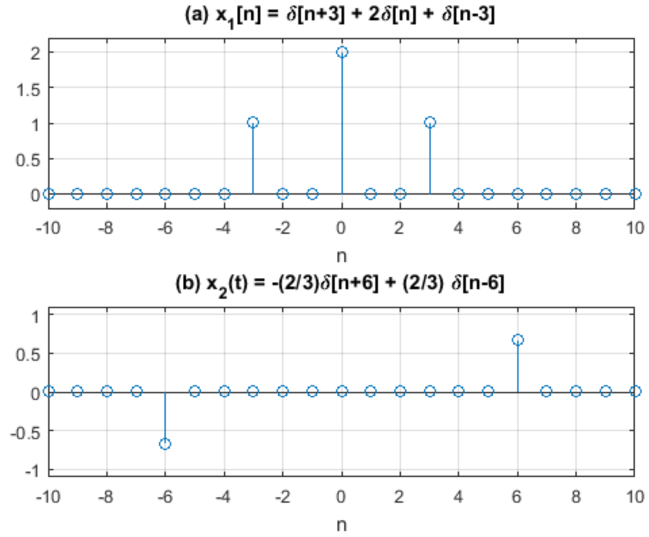

Figura 38. Representación gráfica de deltas discretas.

A continuación, se detallan las **propiedades de la señal delta digital**:

1. **Relación con la señal escalón unitario**:

$$\boxed{\delta[n] = u[n] - u[n-1]} \tag{302}$$

$$u[n] = \sum_{l=-\infty}^{n} \delta[l] = \{l = n - m\} = \sum_{m=0}^{+\infty} \delta[n-m] \iff \boxed{u[n] = \sum_{m=0}^{+\infty} \delta[n-m]} \tag{303}$$

2. **Insensibilidad al escalado de la variable independiente**:

$$\delta[bn] = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad bn \neq 0 \\ 1 & \text{para} \quad bn = 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad n \neq 0 \\ 1 & \text{para} \quad n = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\delta[bn] = \delta[n]} \tag{304}$$

Una importante consecuencia de esta propiedad es la siguiente, si $(n_0/b) \in \mathbb{Z}$:

$$\delta[bn - n_0] = \delta\left[b\left(n - \frac{n_0}{b}\right)\right] = \left\{n' = n - \frac{n_0}{b}\right\} = \delta[bn'] = \delta[n'] = \delta\left[n - \frac{n_0}{b}\right] \tag{305}$$

Por tanto:

$$\boxed{\delta[bn - n_0] = \delta\left[n - \frac{n_0}{b}\right], \quad \forall\left(\frac{n_0}{b}\right) \in \mathbb{Z}} \tag{306}$$

3. **Insensibilidad a la reflexión horizontal sobre el eje de ordenadas**:

$$\delta[-n] = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad (-n) \neq 0 \\ 1 & \text{para} \quad (-n) = 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad n \neq 0 \\ 1 & \text{para} \quad n = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\delta[-n] = \delta[n]} \tag{307}$$

Una importante consecuencia de esta propiedad es la siguiente:

$$\delta[-n + n_0] = \delta[-(n - n_0)] = \{n' = n - n_0\} = \delta[-n'] = \delta[n'] = \delta[n - n_0] \tag{308}$$

Por tanto:

$$\boxed{\delta[-n+n_0]=\delta[n-n_0]} \tag{309}$$

4. **Valores máximo y supremo iguales a $\mathbf{1}$**, y **valores mínimo e ínfimo iguales a $\mathbf{0}$**:

$$S_{\delta[n]}=\max(\delta[n])=1 \tag{310}$$

$$I_{\delta[n]}=\min(\delta[n])=0 \tag{311}$$

5. ***Offset* igual a $\mathbf{0}$**:

$$\mu_{\delta[n]}=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}\delta[n]=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}=0 \tag{312}$$

Una conclusión importante aplicada en el cálculo del *offset* es la siguiente:

$$\boxed{\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta[n]=1} \tag{313}$$

6. **Energía unitaria**:

$$E_{\delta[n]}=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}|\delta[n]|^2=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{n}\delta[n]=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta[n]=1 \tag{314}$$

Y, como consecuencia, su potencia media es igual a 0:

$$P_{\delta[n]}=\lim_{N\to\infty}\frac{E_{\delta[n]}}{2N+1}=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}=0 \tag{315}$$

7. **Producto por una señal cualquiera**:

$$\boxed{x[n]\delta[n-n_0]=x[n_0]\delta[n-n_0]} \tag{316}$$

8. **Sumatorio del producto por una señal cualquiera**:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]\delta[n-n_0]=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n_0]\delta[n-n_0]=x[n_0]\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta[n-n_0]=x[n_0] \tag{317}$$

Por tanto:

$$\boxed{\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]\delta[n-n_0]=x[n_0]} \tag{318}$$

Y, como en el caso analógico, nótese aquí que de (318) junto con (309) se sigue la que, muy probablemente, sea la característica más importante y de mayor calado de la delta discreta:

Toda señal digital es el resultado de una combinación lineal de deltas discretas ponderadas por los valores de amplitud de la señal:

$$\boxed{x[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]\delta[n-m]} \tag{319}$$

Las mismas observaciones realizadas para la delta de Dirac y la ecuación (298) respecto de τ, t y t_0 pueden aplicarse al caso de la delta discreta y la ecuación (319) respecto de m, n y n_0.

También del mismo modo, obsérvese aquí que la señal $\delta[n-n_0]$ aporta toda su información (concentra toda su energía) en la muestra n_0 y solo en la muestra n_0. Así como lo hace $\delta[n-n_1]$ con n_1, y $\delta[n-n_2]$ con n_2, … y así podríamos seguir hasta cubrir cada uno de los valores posibles de la variable n (cada una de las muestras del tiempo discreto) mediante una delta discreta desplazada a cada uno de esas muestras. En general, $\boldsymbol{\delta[n-m]}$ **representa el conjunto infinito de deltas discretas que se requiere para cubrir todas las muestras posibles del tiempo discreto**. Si multiplicamos cada una de las deltas discretas que hay en $\delta[n-m]$ por un cierto valor de amplitud y las sumamos todas mediante un sumatorio en m, estaremos construyendo una combinación lineal de deltas discretas que dará lugar a una señal digital en n cuyos valores de amplitud serán aquellos valores por los que hayamos multiplicado a cada una de las deltas de la combinación. Es decir, estaremos engendrando una señal digital. Pues bien, eso es exactamente lo que sucede en (319): $x[n]$ es engendrada como resultado de una combinación lineal de deltas discretas. Y, también aquí, en la ecuación (303) hay un ejemplo concreto de esto: la señal $u[n]$ es engendrada mediante una combinación de deltas discretas.

Por el momento, baste con darse cuenta del significado de (319) e intuir su gran importancia. En módulos posteriores veremos que la operación realizada en (319) es la «convolución» entre $x[n]$ y $\delta[n]$, y cómo se relaciona todo esto con la noción de «transformada de una señal».

7.4. Señal sinusoidal

La **señal sinusoidal** es aquella señal **cuya amplitud adopta la forma de una oscilación sinusoidal a lo largo de toda la variable independiente**:

$$x(t) = A\sin(\Omega_0 t + \phi) = A\sin(2\pi f_0 t + \phi) \tag{320}$$

$$x[n] = A\sin(\omega_0 n + \phi) \tag{321}$$

allí donde $x(t)$ es una **señal sinusoidal analógica**, de **frecuencia fundamental** Ω_0 (en rad/seg) o f_0 (en Hz), **fase inicial** ϕ (en rad) y **amplitud máxima** A; y donde $x[n]$ es una **señal sinusoidal digital**, de **frecuencia fundamental** ω_0 (en $rad/muestra$), **fase inicial** ϕ (en rad) y **amplitud máxima** A; con $A, \Omega_0, f_0, \omega_0, \phi \in \mathbb{R}$ y $\boldsymbol{\Omega_0, f_0, \omega_0 \geq 0}$.

En primer lugar, conviene recordar que **la función coseno también da lugar a una señal sinusoidal**, ya que un coseno no es más que un seno adelantado $\pi/2\ rad$:

$$A\cos(\Omega_0 t+\phi)=A\sin\left(\Omega_0 t+\phi+\frac{\pi}{2}\right) \tag{322}$$

$$A\cos(\omega_0 n+\phi)=A\sin\left(\omega_0 n+\phi+\frac{\pi}{2}\right) \tag{323}$$

En segundo lugar, es de gran importancia la cuestión de **la periodicidad de la señal sinusoidal**, aspecto que supone una gran diferencia entre la señal sinusoidal analógica y la digital. De entrada, recordemos que la función seno (y también la función coseno) tiene periodicidad 2π:

$$\sin(x)=\sin(x+2\pi r)\,,\forall r\in\mathbb{Z} \tag{324}$$

siendo x aquí una señal, función o valor numérico (tanto da si real o entero) cualquiera.

Entonces, desde la perspectiva analógica, aplicar (324) en (320) permite observar lo siguiente:

$$\begin{aligned}x(t)=A\sin(\Omega_0 t+\phi)=A\sin(\Omega_0 t+\phi+2\pi r)=\\ A\sin\left(\Omega_0\left(t+\frac{2\pi}{\Omega_0}r\right)+\phi\right)=x\left(t+\frac{2\pi}{\Omega_0}r\right),\forall r\in\mathbb{Z}\end{aligned} \tag{325}$$

Comparar (325) con la definición de periodicidad para señales analógicas de (112) permite concluir que:

La señal sinusoidal analógica es una señal periódica y está caracterizada por las propiedades siguientes:

1. Su **periodo fundamental** T_0 (expresado en segundos) es:

$$\boxed{T_0=\frac{2\pi}{\Omega_0}=\frac{1}{f_0}} \tag{326}$$

2. **Diferentes valores de $\boldsymbol{\Omega_0}$ (o $\boldsymbol{f_0}$) dan lugar a señales sinusoidales analógicas diferentes con periodos fundamentales diferentes**.

3. Si el valor de Ω_0 (o f_0) crece, entonces el valor de T_0 decrece en la misma proporción; y si Ω_0 (o f_0) decrece, entonces T_0 crece en la misma proporción. Y este «juego» no tiene límite: **si $\boldsymbol{\Omega_0}$ (o $\boldsymbol{f_0}$) crece/decrece indefinidamente, $\boldsymbol{T_0}$ también decrecerá/crecerá indefinidamente**.

Así, la representación gráfica de la señal sinusoidal analógica es la siguiente:

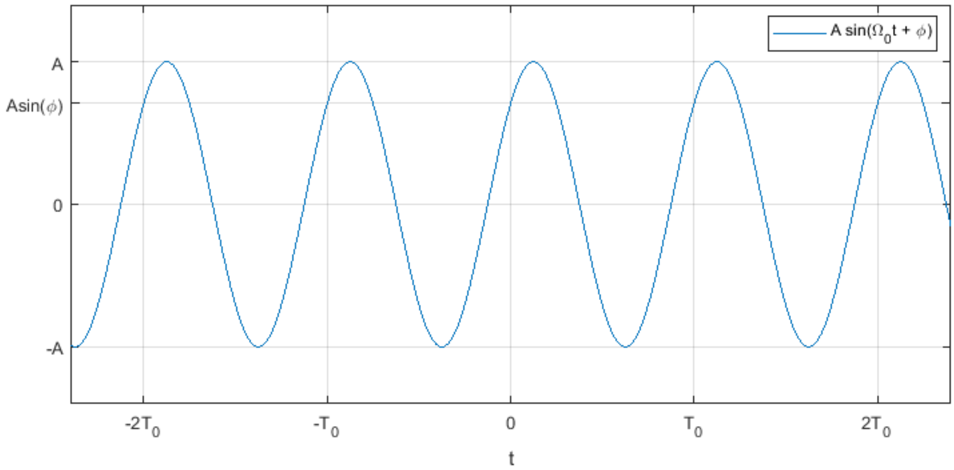

Figura 39. Representación gráfica de la señal sinusoidal analógica (se asume $A > 0$).

Sin embargo, desde la perspectiva digital, las cosas resultan ser muy diferentes. Por un lado, aplicamos (324) en (321):

$$x[n] = A\sin(\omega_0 n + \phi) = A\sin(\omega_0 n + \phi + 2\pi r)\,, \forall r \in \mathbb{Z} \tag{327}$$

Por otro lado, aplicamos la definición de periodicidad para señales digitales de (113) en (321):

$$x[n + mN_0] = \ A\sin(\omega_0(n + mN_0) + \phi) = A\sin(\omega_0 n + \phi + \omega_0 N_0 m)\,, \forall m \in \mathbb{Z} \tag{328}$$

Comparar (327) con (328) permite observar que **la periodicidad de la señal sinusoidal digital está supeditada a que su periodo fundamental haya de ser un valor entero** ($N_0 \in \mathbb{Z}$):

$$x[n] = x[n + mN_0] \iff 2\pi r = \omega_0 N_0 m \implies \omega_0 = \frac{2\pi r}{N_0 m} = 2\pi\frac{M}{N}, \ \forall M, N \in \mathbb{Z} \tag{329}$$

Por tanto, respecto de la periodicidad de la señal sinusoidal digital, se concluye que:

La señal sinusoidal digital es una señal periódica si y solo si su frecuencia fundamental es un múltiplo racional de 2π:

$$\boxed{\omega_0 = 2\pi\frac{M}{N}, \ \forall M, N \in \mathbb{Z}} \tag{330}$$

Además, la periodicidad de la señal sinusoidal digital está caracterizada por las siguientes propiedades:

1. Su **periodo fundamental** N_0 (expresado en muestras) es **el denominador que resulta de expresar M/N como una fracción irreducible** (es decir, como el cociente de dos números coprimos[36]):

$$\boxed{N_0 = N = \frac{2\pi}{\omega_0}M \implies \omega_0 \propto \frac{2\pi}{N_0}} \tag{331}$$

[36] Dos números coprimos son dos enteros positivos que no tienen ningún factor primo común.

siendo M y N coprimos, de donde se sigue que ω_0 es proporcional a $2\pi/N_0$.

2. Una consecuencia importante de lo anterior es que, si bien es posible determinar unívocamente N_0 a partir de ω_0, no es posible determinar unívocamente ω_0 a partir de N_0, puesto que **diferentes valores de ω_0 pueden dar lugar a diferentes señales sinusoidales digitales con el mismo periodo fundamental** (o sea, pueden dar lugar a la misma fracción irreducible M/N).

3. **Todas las frecuencias fundamentales separadas entre sí algún múltiplo entero de 2π dan lugar a la misma señal sinusoidal digital**:

$$\boxed{A\sin(\omega_0 n + \phi) = A\sin\big((\omega_0 + 2\pi r)n + \phi\big), \forall r \in \mathbb{Z}} \tag{332}$$

lo cual es consecuencia de (324), para una señal sinusoidal, como la digital, de variable independiente entera ($n \in \mathbb{Z}$):

$$A\sin\big((\omega_0 + 2\pi r)n + \phi\big) = A\sin(\omega_0 n + 2\pi r n + \phi) = A\sin(\omega_0 n + \phi) \tag{333}$$

4. Un corolario muy importante de todo lo anterior es que **el margen de valores relevantes de ω_0 tiene recorrido 2π**. Es decir, todo valor de ω_0 fuera de $\omega_0 \in [0, 2\pi)$ está separado algún múltiplo entero de 2π de algún valor de ω_0 presente en $[0, 2\pi)$ y, por tanto, da lugar a la misma señal sinusoidal digital que algún valor de ω_0 presente en $[0, 2\pi)$. Así, el «juego» aquí sí tiene límite: que ω_0 crezca/decrezca indefinidamente no implica que N_0 también decrezca/crezca indefinidamente. De hecho, **la frecuencia fundamental ω_0 tiene periodicidad 2π**.

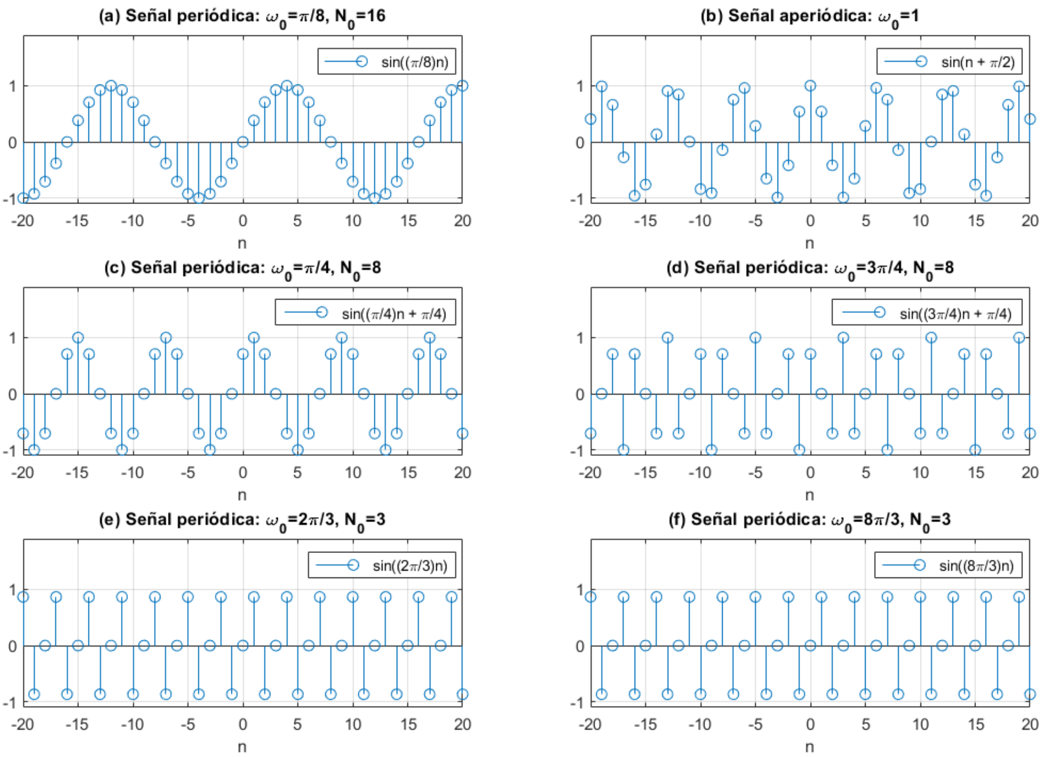

Figura 40. Representación gráfica de señales sinusoidales digitales.

En la Figura 40 se ilustra que la representación gráfica de la señal sinusoidal digital presenta una casuística muy diversa: diferentes valores de ω_0 dan lugar a señales periódicas, aperiódicas, periódicas diferentes con el mismo periodo fundamental, y periódicas idénticas.

También la Figura 21 sirve para ilustrar la representación gráfica de más señales sinusoidales digitales periódicas, puesto que todas las señales que aparecen en el Ejemplo 9 lo son.

A continuación, se propone un ejercicio de caracterización y representación gráfica de señales construidas a partir de señales sinusoidales.

Ejemplo 17

Se pide caracterizar y representar gráficamente las siguientes señales:

$$x_1(t) = 3\sin\left(4\pi\left(t+\frac{1}{8}\right)\right) \tag{334}$$

$$x_2(t) = 3\cos(20\pi t) \tag{335}$$

$$x_3(t) = \frac{\sin(20\pi t)}{\sin(4\pi t)} \tag{336}$$

$$x_4[n] = \cos\left(\sqrt{2}(n-3)\right) \tag{337}$$

$$x_5[n] = \sin^2\left(\frac{3\pi}{5}n\right) \tag{338}$$

Solución

Para una versión extendida y detallada del uso de MATLAB en la resolución de este ejercicio, se recomienda consultar el Anexo de este módulo.

a) Se observa que $x_1(t)$ es una señal sinusoidal analógica de amplitud 3 y frecuencia fundamental $4\pi\ rad/seg$, que ha sido adelantada $1/8$ segundos:

$$x_1(t) = 3\sin\left(4\pi\left(t+\frac{1}{8}\right)\right) = 3\sin\left(4\pi t+\frac{4\pi}{8}\right) = 3\sin\left(4\pi t+\frac{\pi}{2}\right) = 3\cos(4\pi t) \tag{339}$$

Vemos que el adelanto de $1/8$ segundos se traduce en una fase inicial de $\pi/2\ rad$, lo cual nos indica que, en realidad, estamos ante una señal sinusoidal construida mediante un coseno de fase inicial 0. Además, vemos también que el periodo fundamental de $x_1(t)$ es de medio segundo ($T_0 = 2\pi/4\pi = 1/2\ seg$).

b) Se observa que $x_2(t)$ es una señal sinusoidal analógica de amplitud 3, frecuencia fundamental $20\pi\ rad/seg$ y fase inicial 0. Es importante notar que la frecuencia fundamental de $x_2(t)$ es 5 veces mayor que la de $x_1(t)$, lo cual nos indica que el periodo fundamental de $x_2(t)$ es, a su vez, 5 veces menor que el de $x_1(t)$ ($T_0 = 2\pi/20\pi = 1/10\ seg$). Como consecuencia de esto, ya sabemos que $x_2(t)$ oscila 5 veces más rápido que $x_1(t)$, lo cual puede comprobarse en la Figura 41(a-b).

c) Vemos que $x_3(t)$ es el resultado del cociente de dos señales sinusoidales analógicas: en el numerador, tenemos una sinusoidal de amplitud 1, frecuencia fundamental $20\pi\ rad/seg$ y fase inicial 0; y en el denominador, tenemos una sinusoidal de amplitud 1, frecuencia fundamental $4\pi\ rad/seg$ y fase inicial 0. Así, por cada 5 periodos de la sinusoidal del numerador transcurre 1 de la sinusoidal del denominador, por lo que el periodo fundamental de $x_3(t)$ viene determinado por el de la sinusoidal del denominador ($T_0 = 2\pi/4\pi = 1/2\ seg$). Y, además, como puede observarse en la Figura 41(c), cada periodo de $x_3(t)$ contiene, a la vez, la oscilación lenta de la sinusoidal del denominador y la oscilación 5 veces más rápida de la sinusoidal del numerador.

d) Se observa que $x_4[n]$ es una señal sinusoidal digital de amplitud 1 y frecuencia fundamental $\sqrt{2}\ rad/muestra$, que ha sido atrasada 3 muestras:

$$x_4[n] = \cos\left(\sqrt{2}(n-3)\right) = \cos(\sqrt{2}n - 3\sqrt{2}) \qquad (340)$$

Vemos que el atraso de 3 muestras se traduce en una fase inicial de $-3\sqrt{2}\,rad$. Además, vemos también la frecuencia fundamental no es un múltiplo racional de 2π, lo cual nos indica que $x_4[n]$ es una señal aperiódica, como puede observarse en la Figura 41(d).

e) Se observa que $x_5[n]$ es el resultado de elevar al cuadrado una señal sinusoidal digital de amplitud 1, frecuencia fundamental $3\pi/5\ rad/muestra$ y fase inicial 0. De entrada, vemos que la señal sinusoidal digital que está aquí elevada al cuadrado presenta una frecuencia fundamental que es múltiplo racional de 2π, de modo que se trata de una señal periódica, cuyo periodo fundamental es el siguiente:

$$\omega_0 = \frac{3\pi}{5} = \pi\frac{3}{5} = 2\pi\frac{3}{10} \implies N_0 = 10\,muestras \qquad (341)$$

Ahora bien, puesto que $x_5[n]$ es el resultado de elevar esta señal al cuadrado, para conocer su periodo básico podemos aplicar la identidad trigonométrica del coseno del ángulo doble:

$$x_5[n] = \sin^2\left(\frac{3\pi}{5}n\right) = \frac{1-\cos\left(\frac{6\pi}{5}n\right)}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{6\pi}{5}n\right) \qquad (342)$$

Así, vemos que $x_5[n]$ no es sino una señal sinusoidal digital de amplitud $-1/2$, frecuencia fundamental $6\pi/5\ rad/muestra$ y fase inicial 0, más una señal constante de amplitud $1/2$. De este modo, y por el mismo razonamiento que en (341), vemos que el periodo fundamental de $x_5[n]$ es $N_0 = 5\ muestras$ ($6\pi/5 = 2\pi(3/5)$), lo cual puede observarse en la Figura 41(e)

f) Finalmente, representamos gráficamente las señales en la Figura 41.

En la Figura 41(c), se observa cómo, para cada periodo, el máximo y los cuatro pasos por cero coinciden con 5 los pasos por cero de la sinusoidal del numerador. Además, el máximo de cada periodo coincide también con el paso por cero de la sinusoidal del denominador. De hecho, calcular el valor de ese máximo implica lidiar con una indeterminación $0/0$ en $x_3(t)$ en $t = 0, 1/4, 1/2, 3/4, 1$, etc. Esta indeterminación se resuelve fácilmente mediante la regla de l'Hôpital o, incluso más rápidamente, aproximando la función seno por su argumento cuando este tiende a 0.

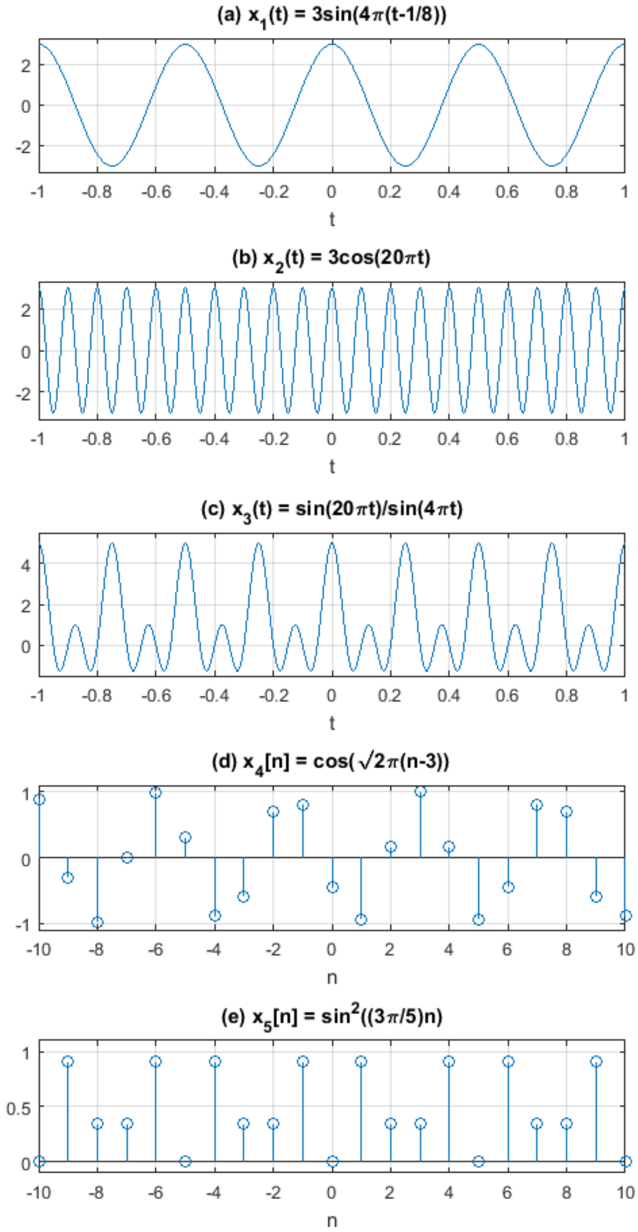

Figura 41. Representación gráfica de las señales del Ejemplo 17.

Y, finalmente, se propone un ejercicio de cálculo de **parámetros básicos de la señal sinusoidal**.

Ejemplo 18

Se tienen las siguientes señales sinusoidales:

$$x_1(t) = \sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{4}\right) \quad (343)$$

$$x_2[n] = \sin\left(\frac{\pi}{3}n\right) \quad (344)$$

Para cada una de ellas, se pide calcular:

a) Sus valores máximo, supremo, mínimo e ínfimo.
b) Su *offset*.
c) Su energía y su potencia media.

d) La energía y la potencia media de sus periodos básicos.

Solución

Para una versión extendida y detallada del uso de MATLAB en la resolución de este ejercicio, se recomienda consultar el Anexo de este módulo.

a) De entrada, vemos que $x_1(t)$ es una señal sinusoidal analógica (y, por tanto, periódica) de amplitud 1, frecuencia fundamental $100\pi\, rad/seg$ (o sea, de $50\ Hz$ y con periodo fundamental $\boldsymbol{T_0 = 1/50\ seg}$) y fase inicial $\pi/4\, rad$.

Así, vemos claramente que $x_1(t)$ está acotada en amplitud entre -1 y 1:

$$-1 \le x_1(t) \le 1 \tag{345}$$

Por tanto, sus valores máximo, supremo, mínimo e ínfimo son los siguientes:

$$S_{x_1} = \max\big(x_1(t)\big) = 1 \tag{346}$$

$$I_{x_1} = \min\big(x_1(t)\big) = -1 \tag{347}$$

Por su parte, $x_2[n]$ es una señal sinusoidal digital de amplitud 1, frecuencia fundamental $\pi/3\, rad$ y fase inicial 0. Además, puesto que su frecuencia fundamental es un múltiplo racional de 2π (en concreto, $2\pi/6$), $x_2[n]$ es una señal periódica de periodo fundamental $\boldsymbol{N_0 = 6}$.

De este modo, vemos que $x_2[n]$ también está claramente acotada en amplitud entre -1 y 1. Sin embargo, al tratarse de una sinusoidal digital, de entrada no tiene por qué alcanzar dichas cotas, puesto que, dependiendo de los valores de su frecuencia fundamental y su fase inicial, puede no haber ningún valor entero de n que haga que el seno valga 1 o -1. Y de hecho, esto es lo que ocurre en $x_2[n]$, puesto que no hay ningún valor de n para el cual el argumento del seno sea igual a $\pi/2\, rad$. Lo que se observa es que el periodo básico de $x_2[n]$ (para $0 \le n < 6$) es la siguiente secuencia de muestras:

$$\big[x_2[0]\ x_2[1]\ x_2[2]\ x_2[3]\ x_2[4]\ x_2[5]\big] = \big[0\ \ \sqrt{3}/2\ \ \sqrt{3}/2\ \ 0\ -\sqrt{3}/2\ -\sqrt{3}/2\big] \tag{348}$$

Así, las cotas mínima y máxima de $x_2[n]$ son:

$$-\sqrt{3}/2 \le x_2[n] \le \sqrt{3}/2 \tag{349}$$

Y, por tanto, sus valores máximo, supremo, mínimo e ínfimo son los siguientes:

$$S_{x_2} = \max(x_2[n]) = \frac{\sqrt{3}}{2} \tag{350}$$

$$I_{x_2} = \min(x_2[n]) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \tag{351}$$

b) Respecto del *offset* de $x_1(t)$, claramente es igual a 0:

$$\mu_{x_1} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{4}\right) dt = \lim_{T\to\infty} \frac{\left[100\pi \cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{4}\right)\right]_{-T}^{T}}{2T} = \tag{352}$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{100\pi\left(\cos\left(100\pi T+\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(-100\pi T+\frac{\pi}{4}\right)\right)}{2T} = \lim_{T\to\infty} \frac{100\pi}{2T} = 0$$

En general, **el *offset* de la señal sinusoidal analógica es igual a $\mathbf{0}$**.

Respecto del *offset* de $x_2[n]$, una observación interesante que puede hacerse aquí es que **el *offset* de toda señal periódica es siempre igual al *offset* de su periodo básico**, puesto que toda señal periódica está centrada verticalmente en aquel valor de amplitud al que esté centrado verticalmente su periodo básico. De este modo, habiendo explicitado el periodo básico de $x_2[n]$ en (348), ya podemos ver que el *offset* de $x_2[n]$ también será igual a 0, ya que la suma de las muestras de su periodo básico es 0:

$$\mu_{x_2} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N} \sin\left(\frac{\pi}{3}n\right) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1}\left(\frac{2N+1}{6}\sum_{n=0}^{5} \sin\left(\frac{\pi}{3}n\right)\right) =$$
$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{6}\left(0+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+0-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \lim_{N\to\infty} 0 = 0 \qquad (353)$$

En general, **el *offset* de la señal sinusoidal digital periódica es igual a $\mathbf{0}$**, salvo si su frecuencia fundamental es un múltiplo entero de 2π: en ese caso, la señal es constante y su *offset* es igual al valor de amplitud que sea que adopten todas las muestras de la señal. Y si la señal sinusoidal digital no es periódica, entonces no hay forma de conocer *a priori* el valor de su *offset*.

c) Respecto de la energía de $x_1(t)$, es claramente infinita:

$$E_{x_1} = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} |x_1(t)|^2 dt = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} \sin^2\left(100\pi t+\frac{\pi}{4}\right) dt =$$
$$\lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos\left(200\pi t+\frac{\pi}{4}\right) dt = \lim_{T\to\infty} \left[\frac{t}{2}-\frac{1}{400\pi}\sin\left(200\pi t+\frac{\pi}{4}\right)\right]_{-T}^{T} = \qquad (354)$$
$$\lim_{T\to\infty} \left(\frac{T}{2}-\frac{1}{400\pi}\sin\left(200\pi T+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{(-T)}{2}-\frac{1}{400\pi}\sin\left(-200\pi T+\frac{\pi}{4}\right)\right) =$$
$$\lim_{T\to\infty} \left(T-\frac{1}{400\pi}\left(\sin\left(200\pi T+\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(-200\pi T+\frac{\pi}{4}\right)\right)\right) = \lim_{T\to\infty} T = \infty$$

En general, **toda señal periódica, tanto analógica como digital, es siempre de energía infinita.**

Y, al calcular la potencia media de $x_1(t)$, vemos que converge a un valor finito:

$$P_{x_1} = \lim_{T\to\infty} \frac{E_{x_1}}{2T} = \lim_{T\to\infty} \frac{T}{2T} = \frac{1}{2} \qquad (355)$$

En general, **la potencia media de la señal sinusoidal analógica es igual a la mitad del cuadrado de su amplitud ($A^2/2$)**.

Respecto de la energía de $x_2[n]$, es también claramente infinita:

$$E_{x_2} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} |x_2[n]|^2 = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \sin^2\left(\frac{\pi}{3}n\right) = \lim_{N\to\infty} \left(\frac{2N+1}{6}\sum_{n=0}^{5} \sin\left(\frac{\pi}{3}n\right)\right) = \qquad (356)$$

$$\lim_{N\to\infty}\frac{2N+1}{6}\left(0+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+0+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\right)=\lim_{N\to\infty}\frac{2N+1}{2}=\lim_{N\to\infty}N=\infty$$

Y, al calcular la potencia media de $x_2[n]$, vemos que también converge a un valor finito:

$$P_{x_2}=\lim_{N\to\infty}\frac{E_{x_2}}{2N+1}=\lim_{N\to\infty}\frac{N}{2N+1}=\frac{1}{2} \tag{357}$$

En general, **la potencia media de la señal sinusoidal digital periódica es igual a la mitad del cuadrado de su amplitud ($A^2/2$)**, salvo si su frecuencia fundamental es un múltiplo entero de 2π: en ese caso, la señal es constante y su potencia media es igual al cuadrado del valor de amplitud que sea que adopten todas las muestras de la señal.

d) Calculamos la energía del periodo básico de $x_1(t)$:

$$E_{x_1{}_0^{T_0}}=\int_0^{T_0}|x_1(t)|^2dt=\left[\frac{t}{2}-\frac{1}{400\pi}\sin\left(200\pi t+\frac{\pi}{4}\right)\right]_0^{\frac{1}{50}}=$$
$$\frac{1}{100}-\frac{1}{400\pi}\sin\left(4\pi+\frac{\pi}{4}\right)-0+\frac{1}{400\pi}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{100} \tag{358}$$

En general, **la energía del periodo básico de la señal sinusoidal analógica es igual al cuadrado de su amplitud por la mitad de su periodo fundamental ($A^2T_0/2$)**.

A continuación, calculamos la potencia media del periodo básico de $x_1(t)$:

$$P_{x_1{}_0^{T_0}}=\frac{E_{x_1{}_0^{T_0}}}{T_0}=50\frac{1}{100}=\frac{1}{2} \tag{359}$$

En general, **la potencia media del periodo básico de la señal sinusoidal analógica es igual a la mitad del cuadrado de su amplitud ($A^2/2$)**.

Ahora, calculamos la energía del periodo básico de $x_2[n]$:

$$E_{x_2{}_0^{N_0}}=\sum_{n=0}^{N_0-1}|x_2[n]|^2=\sum_{n=0}^{5}\sin^2\left(\frac{\pi}{3}n\right)=0+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+0+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}=3 \tag{360}$$

En general, **la energía del periodo básico de la señal sinusoidal digital periódica es igual al cuadrado de su amplitud por la mitad de su periodo fundamental ($A^2N_0/2$)**, salvo si su frecuencia fundamental es un múltiplo entero de 2π: en ese caso, la señal es constante y la energía de su periodo básico es igual al cuadrado del valor de amplitud que sea que adopten todas las muestras de la señal.

Y, ahora, calculamos la potencia media del periodo básico de $x_2[n]$:

$$P_{x_2{}_0^{N_0}}=\frac{E_{x_2{}_0^{N_0}}}{N_0}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2} \tag{361}$$

En general, **la potencia media del periodo básico de la señal sinusoidal digital periódica es la mitad del cuadrado de su amplitud ($A^2/2$)**, salvo si su frecuencia fundamental es un múltiplo entero de 2π: en ese caso, la señal es constante y la potencia media de su periodo básico es igual al cuadrado del valor de amplitud que sea que adopten todas las muestras de la señal.

7.5. Señal exponencial compleja

La **señal exponencial compleja** es aquella **señal compleja cuyo módulo es constante y cuya fase es lineal**:

$$X(t) = Ae^{j(\Omega_0 t+\phi)} \tag{362}$$

$$X[n] = Ae^{j(\omega_0 n+\phi)} \tag{363}$$

siendo $X(t)$ una **señal exponencial compleja analógica**, de **módulo** A, **frecuencia fundamental** Ω_0 (en rad/seg) y **fase inicial** ϕ (en rad); y $X[n]$ una **señal exponencial compleja digital**, de **módulo** A, **frecuencia fundamental** ω_0 (en $rad/muestra$) y **fase inicial** ϕ (en rad); con $A, \Omega_0, \omega_0, \phi \in \mathbb{R}$ y siendo $\boldsymbol{A \geq 0}$.

En primer lugar, recordemos (108) y (109): **trabajar con una señal compleja es trabajar con dos señales reales, su señal módulo y su señal fase** (o, si se prefiere, su señal parte real y su señal parte imaginaria). Con la señal exponencial compleja, esto es bien fácil, puesto que la misma forma de la señal ya permite identificar directamente tanto su módulo como su fase:

$$X(t) = Ae^{j(\Omega_0 t+\phi)} \Leftrightarrow \begin{cases} |X(t)| = A \\ \mathfrak{Arg}\big(X(t)\big) = \Omega_0 t + \phi \end{cases} \tag{364}$$

$$X[n] = Ae^{j(\omega_0 n+\phi)} \Leftrightarrow \begin{cases} |X[n]| = A \\ \mathfrak{Arg}(X[n]) = \omega_0 n + \phi \end{cases} \tag{365}$$

De este modo, estudiaremos la señal exponencial compleja (y, de hecho, cualquier señal compleja con la que trabajemos) moviéndonos siempre en términos de su módulo y su fase.

El primer ejemplo de esto es justamente la **representación gráfica de la señal exponencial compleja**, que **implica representar dos señales reales: la señal módulo y la señal fase**:

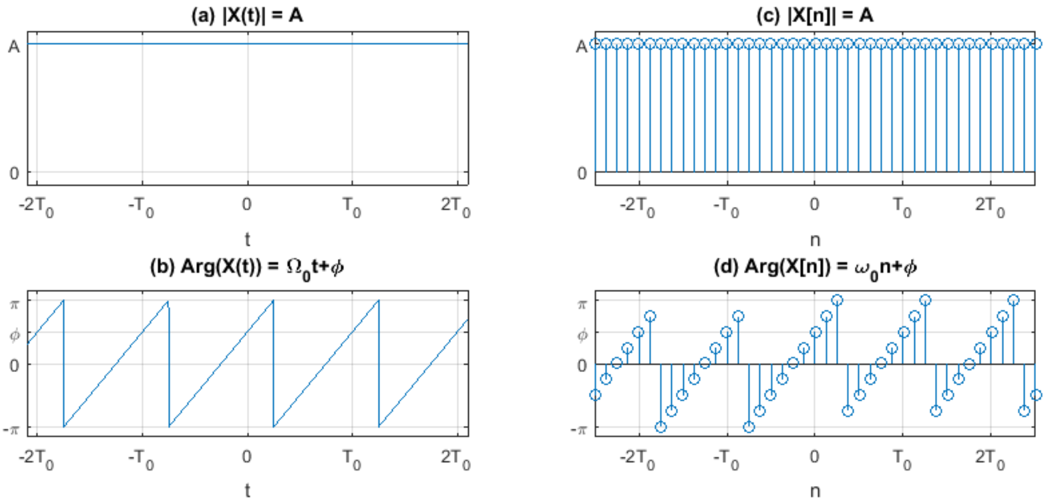

Figura 42. Representación gráfica de la señal exponencial compleja. (a-b) Señal analógica. (c-d) Señal digital. Se observa, además, tanto en (b) como en (c) que las fases π y $-\pi$ son intercambiables, ya que $e^{j\pi} = e^{-j\pi} = -1$.

Si observamos la Figura 42, vemos que, respecto de la señal módulo, hay poco que decir, pues es simplemente una señal constante. Sin embargo, respecto de la señal fase, sí conviene notar que presenta una particularidad: **la amplitud de la señal fase de toda señal compleja se representa siempre entre $-\pi$ y π**, ya que la fase es un ángulo en el plano complejo, de modo que sus valores tienen un recorrido relevante de longitud 2π.

En segundo lugar, es de gran importancia **la relación entre la señal exponencial compleja y la señal sinusoidal**, que viene determinada por las fórmulas de Euler:

$$A\sin(\Omega_0 t+\phi) = A\frac{e^{j(\Omega_0 t+\phi)}-e^{-j(\Omega_0 t+\phi)}}{2j} = \frac{A}{2}e^{j\left(\Omega_0 t+\phi-\frac{\pi}{2}\right)} - \frac{A}{2}e^{-j\left(\Omega_0 t+\phi+\frac{\pi}{2}\right)} \qquad (366)$$

$$A\sin(\omega_0 n+\phi) = A\frac{e^{j(\omega_0 n+\phi)}-e^{-j(\omega_0 n+\phi)}}{2j} = \frac{A}{2}e^{j\left(\omega_0 n+\phi-\frac{\pi}{2}\right)} - \frac{A}{2}e^{-j\left(\omega_0 n+\phi+\frac{\pi}{2}\right)} \qquad (367)$$

puesto que $1/j = -j = e^{-j\frac{\pi}{2}}$.

Y, para las señales sinusoidales construidas mediante la función coseno:

$$A\cos(\Omega_0 t+\phi) = \frac{A}{2}e^{j(\Omega_0 t+\phi)} + \frac{A}{2}e^{-j(\Omega_0 t+\phi)} \qquad (368)$$

$$A\cos(\omega_0 n+\phi) = \frac{A}{2}e^{j(\omega_0 n+\phi)} + \frac{A}{2}e^{-j(\omega_0 n+\phi)} \qquad (369)$$

En tercer lugar, se observa que, en el caso de la señal exponencial compleja, se ha definido que $\boldsymbol{A \geq 0}$, restricción que no se hizo en la señal sinusoidal y que permite identificar directamente el módulo de la señal exponencial compleja con A, como hemos visto en (364) y (365). En general, todo signo negativo aplicado a A es un *offset* de valor π en la fase de la señal:

$$-Ae^{j(\Omega_0 t+\phi)} = Ae^{j\pi}e^{j(\Omega_0 t+\phi)} = Ae^{j(\Omega_0 t+\phi+\pi)} \qquad (370)$$

$$-Ae^{j(\omega_0 n+\phi)} = Ae^{j\pi}e^{j(\omega_0 n+\phi)} = Ae^{j(\omega_0 n+\phi+\pi)} \qquad (371)$$

En cuarto lugar, es también de gran importancia la cuestión de **la periodicidad de la señal exponencial compleja**. Puesto que, como ahora veremos, esta cuestión es análoga a la de la periodicidad de la señal sinusoidal, ya estudiada en el apartado 7.4, aquí vamos a plantearla de forma mucho más directa. En todo caso, donde se ve más claramente la periodicidad de la exponencial compleja no es en su módulo y su fase, sino en su parte real y su parte imaginaria:

$$e^{jx} = \cos(x) + j\sin(x) \iff \begin{cases} \mathfrak{Re}\left(e^{jx}\right) = \cos(x) \\ \mathfrak{Im}\left(e^{jx}\right) = \sin(x) \end{cases} \qquad (372)$$

Por tanto, de entrada, está claro que la función exponencial compleja tiene periodicidad 2π:

$$e^{j(x+2\pi r)} = e^{jx}\underbrace{e^{j2\pi r}}_{1} = e^{jx}, \forall r \in \mathbb{Z} \qquad (373)$$

siendo x en (372) y (373) una señal, función o valor numérico cualquiera.

Así, por un lado, **la señal exponencial compleja analógica es siempre una señal periódica**:

$$Ae^{j\left(\Omega_0\left(t+r\frac{2\pi}{\Omega_0}\right)+\phi\right)}=Ae^{j(\Omega_0t+\phi+2\pi r)}=Ae^{j(\Omega_0t+\phi)}\underbrace{e^{j2\pi r}}_{1}=Ae^{j(\Omega_0t+\phi)} \qquad (374)$$

Y, por tanto, su periodo fundamental T_0 es el siguiente:

$$T_0=\frac{2\pi}{|\Omega_0|} \qquad (375)$$

donde el denominador es $|\Omega_0|$ en lugar de Ω_0 porque en la exponencial compleja la frecuencia fundamental no está restringida a valores positivos (como sí lo está en la señal sinusoidal).

Mientras que, por otro lado, **la señal exponencial compleja digital es una señal periódica si y solo si su frecuencia fundamental es un múltiplo racional de 2π**:

$$\omega_0=2\pi\frac{M}{N},\ \forall M,N\in\mathbb{Z} \qquad (376)$$

siendo su periodo fundamental $N_0=N$ cuando M/N es una fracción irreducible.

Recordemos que esto se debe a que la periodicidad de la exponencial compleja digital está supeditada a que su periodo fundamental sea un valor entero ($N_0\in\mathbb{Z}$); si se cumple (376):

$$Ae^{j\left(\omega_0\left(n+r\frac{2\pi}{\omega_0}\right)+\phi\right)}=Ae^{j(\omega_0n+\phi+2\pi r)}=Ae^{j(\omega_0n+\phi)}\underbrace{e^{j2\pi r}}_{1}=Ae^{j(\omega_0n+\phi)} \qquad (377)$$

Además, como ya vimos en la señal sinusoidal digital, **la frecuencia fundamental $\boldsymbol{\omega_0}$ tiene periodicidad $\boldsymbol{2\pi}$**; es decir, que **el margen de valores relevantes de $\boldsymbol{\omega_0}$ tiene recorrido $\boldsymbol{2\pi}$**. Esto es así porque **todas las frecuencias fundamentales separadas entre sí algún múltiplo entero de $\boldsymbol{2\pi}$ dan lugar a la misma señal exponencial compleja digital**:

$$Ae^{j((\omega_0+2\pi r)n+\phi)}=Ae^{j(\omega_0n+\phi+2\pi rn)}=Ae^{j(\omega_0n+\phi)}\underbrace{e^{j2\pi rn}}_{1}=Ae^{j(\omega_0n+\phi)} \qquad (378)$$

A continuación, se propone un ejercicio de caracterización y representación gráfica de señales construidas a partir de señales exponenciales complejas.

Ejemplo 19

Se pide caracterizar y representar gráficamente las siguientes señales:

$$X_1(t)=\frac{1}{2}+e^{j4\pi t}+\frac{1}{2}e^{j8\pi t} \qquad (379)$$

$$X_2[n]=1-e^{j\frac{\pi}{2}(n-1)}-e^{j\frac{3\pi}{2}(n-1)}-e^{j2\pi n} \qquad (380)$$

Solución

Para una versión extendida y detallada del uso de MATLAB en la resolución de este ejercicio, se recomienda consultar el Anexo de este módulo.

a) Respecto de $X_1(t)$:

$$X_1(t) = \frac{1}{2} + e^{j4\pi t} + \frac{1}{2}e^{j8\pi t} = e^{j4\pi t}\left(\frac{1}{2}e^{-j4\pi t} + 1 + \frac{1}{2}e^{j4\pi t}\right) = \left(1 + \underbrace{\frac{1}{2}e^{-j4\pi t} + \frac{1}{2}e^{j4\pi t}}_{\cos(4\pi t)}\right)e^{j4\pi t} = (1+\cos(4\pi t))e^{j4\pi t} \quad (381)$$

Vemos que, trabajando un poco con las exponenciales complejas, $X_1(t)$ queda expresada como el producto de una señal real $(1+\cos(4\pi t))$ por una exponencial compleja de módulo 1, frecuencia fundamental 4π y fase inicial 0. Así, **puesto que la señal real que multiplica a la exponencial compleja es de amplitud positiva para todo t, solo aporta información a la señal módulo de $X_1(t)$ y la señal fase de $x_1(t)$ es directamente la fase de $e^{j4\pi t}$**:

$$X_1(t) = (1+\cos(4\pi t))e^{j4\pi t} \iff \begin{cases} |X_1(t)| = |1+\cos(4\pi t)| = 1+\cos(4\pi t) \\ \mathfrak{Arg}(X_1(t)) = \mathfrak{Arg}(e^{j4\pi t}) = 4\pi t \end{cases} \quad (382)$$

Conviene notar que, si la señal real $1+\cos(4\pi t)$ presentase amplitudes negativas, la señal módulo sería $|X_1(t)| = |1+\cos(4\pi t)| \neq 1+\cos(4\pi t)$ y deberíamos usar la señal signo definida en (273) para añadir la información de las amplitudes negativas de $1+\cos(4\pi t)$ en la señal fase de $X_1(t)$, de modo tal que $\mathfrak{Arg}(X_1(t))$ sufriera incrementos de valor π en aquellos intervalos de t en los que la señal real $1+\cos(4\pi t)$ presentase valores de amplitud negativos.

b) Respecto de $X_2[n]$:

$$X_2[n] = 1 - e^{j\frac{\pi}{2}(n-1)} - e^{j\frac{3\pi}{2}(n-1)} - \underbrace{e^{j2\pi n}}_{1} = 1 - e^{j\frac{\pi}{2}n}\underbrace{e^{-j\frac{\pi}{2}}}_{-j} - e^{j\frac{3\pi}{2}n}\underbrace{e^{-j\frac{3\pi}{2}}}_{j} - 1 =$$

$$j\left(e^{j\frac{\pi}{2}n} - e^{j\frac{3\pi}{2}n}\right) = j\underbrace{e^{j\pi n}}_{(-1)^n}\left(e^{-j\frac{\pi}{2}n} - e^{j\frac{\pi}{2}n}\right) = \underbrace{-j}_{\frac{1}{j}}(-1)^n\left(e^{j\frac{\pi}{2}n} - e^{-j\frac{\pi}{2}n}\right) = \quad (383)$$

$$(-1)^n\underbrace{\frac{e^{j\frac{\pi}{2}n} - e^{-j\frac{\pi}{2}n}}{j}}_{2\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)} = 2(-1)^n\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)$$

De nuevo, trabajando un poco con las exponenciales complejas, vemos que **$X_2[n]$ es una señal real**, de modo que su representación gráfica será aún más sencilla, si cabe.

c) Finalmente, representamos gráficamente las señales:

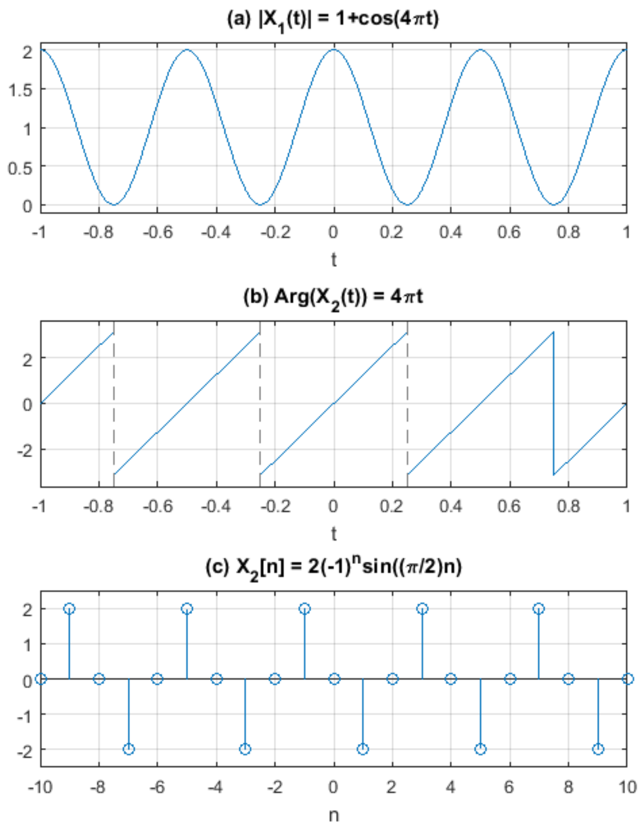

Figura 43. Representación gráfica de las señales del Ejemplo 19.

Seguidamente, se propone un ejercicio de cálculo de **parámetros básicos de la señal exponencial compleja**.

Ejemplo 20

Se tienen las siguientes señales exponenciales complejas:

$$X_1(t) = e^{j100\pi t} \tag{384}$$

$$X_2[n] = e^{j\frac{\pi}{3}n} \tag{385}$$

Para cada una de ellas, se pide calcular:

a) Sus valores máximo, supremo, mínimo e ínfimo.
b) Su *offset*.
c) Su energía y su potencia media.
d) La energía y la potencia media de sus periodos básicos.

Solución

Para una versión extendida y detallada del uso de MATLAB en la resolución de este ejercicio, se recomienda consultar el Anexo de este módulo.

a) De entrada, vemos que $X_1(t)$ es una señal exponencial compleja analógica (y, por tanto, periódica) de amplitud 1, frecuencia fundamental $100\pi\ rad/seg$ (o sea, de $50\ Hz$ y con periodo fundamental $\boldsymbol{T_0 = 1/50}\ seg$) y fase inicial 0. Así, su módulo es una señal constante de amplitud 1, mientras que su señal fase es una recta de pendiente 100π y ordenada en el origen 0.

Por tanto, los valores máximo, supremo, mínimo e ínfimo del módulo de $X_1(t)$ son todos 1:

$$S_{|X_1|} = \max(|X_1(t)|) = I_{|X_1|} = \min(|X_1(t)|) = 1 \quad (386)$$

Mientras que los de su fase son, como en cualquier señal fase que recorra todos los posibles valores de fase:

$$S_{\mathfrak{Arg}(X_1(t))} = \max\left(\mathfrak{Arg}\big(X_1(t)\big)\right) = \pi \quad (387)$$

$$I_{\mathfrak{Arg}(X_1(t))} = \min\left(\mathfrak{Arg}\big(X_1(t)\big)\right) = -\pi \quad (388)$$

Por su parte, $X_2[n]$ es una señal exponencial compleja digital de amplitud 1, frecuencia fundamental $\pi/3\,rad$ y fase inicial 0. Además, puesto que su frecuencia fundamental es un múltiplo racional de 2π (en concreto, $2\pi/6$), $X_2[n]$ es una señal periódica de periodo fundamental $\boldsymbol{N_0 = 6}$. Así, su módulo es una señal constante de amplitud 1, mientras que su señal fase es una recta discretizada de pendiente $\pi/3$ y ordenada en el origen 0.

Por tanto, los valores máximo, supremo, mínimo e ínfimo del módulo de $X_2[n]$ son todos 1:

$$S_{|X_2|} = \max(|X_2[n]|) = I_{|X_2|} = \min(|X_2[n]|) = 1 \quad (389)$$

Mientras que los de su fase son, de nuevo:

$$S_{\mathfrak{Arg}(X_2[n])} = \max\big(\mathfrak{Arg}(X_2[n])\big) = \pi \quad (390)$$

$$I_{\mathfrak{Arg}(X_2[n])} = \min\big(\mathfrak{Arg}(X_2[n])\big) = -\pi \quad (391)$$

En general, no tiene mucho interés hablar de valores máximo y mínimo de una señal fase, puesto que **la fase no es de naturaleza lineal, sino circular** (de hecho, $\pi\,rad = -\pi\,rad$). Aun así, podemos hacerlo en la medida en que entendamos la señal fase como una señal real cuyo recorrido en amplitud está siempre acotado entre $-\pi$ y π:

$$-\pi < \mathfrak{Arg}\big(X(t)\big), \mathfrak{Arg}(X[n]) < \pi \quad (392)$$

siendo $X(t)$ y $X[n]$ dos señales complejas cualesquiera, analógica y digital, respectivamente.

b) Respecto del *offset* de $X_1(t)$, claramente es igual a 0:

$$\mu_{X_1} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} e^{j100\pi t} dt = \lim_{T\to\infty} \frac{[100\pi j e^{j100\pi t}]_{-T}^{T}}{2T} =$$
$$\lim_{T\to\infty} \frac{100\pi j(e^{j100\pi T} - e^{-j100\pi T})}{2T} = \lim_{T\to\infty} \frac{-100\pi \sin(100\pi T)}{T} = 0 \quad (393)$$

En general, **el *offset* de la señal exponencial compleja analógica es igual a $\boldsymbol{0}$**.

Respecto del *offset* de $X_2[n]$, lo calculamos (se trata del límite de una serie geométrica) y vemos que también es igual a 0:

$$\mu_{X_2} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} e^{j\frac{\pi}{3}n} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \left(\frac{e^{-j\frac{\pi}{3}N} - e^{j\frac{\pi}{3}} e^{j\frac{\pi}{3}N}}{1 - e^{j\frac{\pi}{3}}} \right) =$$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \left(\frac{e^{-j\frac{\pi}{3}N} - e^{j\frac{\pi}{3}(N+1)}}{1 - e^{j\frac{\pi}{3}}} \right) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \left(\frac{e^{j\frac{\pi}{6}} \left(e^{-j\frac{\pi}{3}\left(N+\frac{1}{2}\right)} - e^{j\frac{\pi}{3}\left(N+\frac{1}{2}\right)} \right)}{e^{j\frac{\pi}{6}} \left(e^{-j\frac{\pi}{6}} - e^{j\frac{\pi}{6}} \right)} \right) = \quad (394)$$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}\left(N+\frac{1}{2}\right)\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \lim_{N\to\infty} \frac{2\sin\left(\frac{\pi}{3}\left(N+\frac{1}{2}\right)\right)}{2N+1} = 0$$

En general, **el *offset* de la señal exponencial compleja digital periódica es igual a $\mathbf{0}$**, salvo si su frecuencia fundamental es un múltiplo entero de 2π: en ese caso, la señal es real y constante y su *offset* es igual al valor de amplitud que sea que adopten todas las muestras de la señal. Y si la señal exponencial compleja digital no es periódica, entonces no hay forma de conocer *a priori* el valor de su *offset*.

c) Sabemos que la energía de $X_1(t)$ es infinita, por tratarse de una señal periódica:

$$E_{X_1} = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} \left| e^{j100\pi t} \right|^2 dt = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} 1^2 dt = \lim_{T\to\infty} [t]_{-T}^{T} = \lim_{T\to\infty} 2T = \infty \quad (395)$$

Y, al calcular la potencia media de $X_1(t)$, vemos que converge a la unidad:

$$P_{X_1} = \lim_{T\to\infty} \frac{E_{X_1}}{2T} = \lim_{T\to\infty} \frac{2T}{2T} = 1 \quad (396)$$

En general, **la potencia media de la señal exponencial compleja analógica es igual al cuadrado de su amplitud (A^2)**.

De nuevo, sabemos que la energía de $X_2[n]$ es también infinita:

$$E_{X_2} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \left| e^{j\frac{\pi}{3}n} \right|^2 = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} 1^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{2N+1}{2} 2 = \lim_{N\to\infty} 2N+1 = \infty \quad (397)$$

Y, al calcular la potencia media de $X_2[n]$, vemos que también converge a la unidad:

$$P_{x_2} = \lim_{N\to\infty} \frac{E_{x_2}}{2N+1} = \lim_{N\to\infty} \frac{2N+1}{2N+1} = 1 \quad (398)$$

En general, **la potencia media de la señal exponencial compleja digital periódica es igual al cuadrado de su amplitud (A^2)**, salvo si su frecuencia fundamental es un múltiplo entero de 2π: en ese caso, la señal es constante y su potencia media es igual al cuadrado del valor de amplitud que sea que adopten todas las muestras de la señal.

d) Calculamos la energía del periodo básico de $X_1(t)$:

$$E_{X_1{}_0^{T_0}} = \int_0^{T_0} |X_1(t)|^2 dt = [t]_0^{T_0} = T_0 = \frac{1}{50} \quad (399)$$

En general, **la energía del periodo básico de la señal exponencial compleja analógica es igual al cuadrado de su amplitud por su periodo fundamental (A^2T_0)**.

A continuación, calculamos la potencia media del periodo básico de $X_1(t)$:

$$P_{X_{1_0}^{T_0}} = \frac{E_{X_{1_0}^{T_0}}}{T_0} = \frac{T_0}{T_0} = 1 \tag{400}$$

En general, **la potencia media del periodo básico de la señal exponencial compleja analógica es igual al cuadrado de su amplitud (A^2)**.

Ahora, calculamos la energía del periodo básico de $X_2[n]$:

$$E_{x_{2_0}^{N_0}} = \sum_{n=0}^{N_0-1} |x_2[n]|^2 = \sum_{n=0}^{5} 1 = 6 \tag{401}$$

En general, **la energía del periodo básico de la señal exponencial compleja digital periódica es igual al cuadrado de su amplitud por su periodo fundamental (A^2N_0)**, salvo si su frecuencia fundamental es un múltiplo entero de 2π: en ese caso, la señal es constante y la energía de su periodo básico es igual al cuadrado del valor de amplitud que sea que adopten todas las muestras de la señal.

Y, ahora, calculamos la potencia media del periodo básico de $X_2[n]$:

$$P_{x_{2_0}^{N_0}} = \frac{E_{x_{2_0}^{N_0}}}{N_0} = \frac{6}{6} = 1 \tag{402}$$

En general, **la potencia media del periodo básico de la señal exponencial compleja digital periódica es igual al cuadrado de su amplitud (A^2)**, salvo si su frecuencia fundamental es un múltiplo entero de 2π: en ese caso, la señal es constante y la potencia media de su periodo básico es igual al cuadrado del valor de amplitud que sea que adopten todas las muestras de la señal.

Para finalizar este apartado, a continuación se introduce la razón por la cual la señal exponencial compleja resulta ser, junto con las señales delta, la señal más importante y de mayor relevancia en toda la teoría de señales y sistemas:

En general, **una señal periódica puede ser expresada como el resultado de una combinación lineal de exponenciales complejas**. Es lo que se conoce como desarrollo en **serie de Fourier**[37] de una señal periódica.

Para una introducción breve y de carácter meramente descriptivo a las Series de Fourier, se puede consultar el Anexo de este módulo.

[37] El matemático y físico francés Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) introdujo lo que hoy conocemos como «serie de Fourier» en su obra *Teoría analítica del calor* (1822).

En todo caso, esta es una cuestión de gran relevancia que se estudiará muy en detalle en módulos posteriores. Por el momento, nos limitaremos a aclarar que el interés por las señales exponenciales complejas no se agota aquí. En módulos posteriores, al estudiar el concepto de «transformada de una señal», veremos que no solo las señales periódicas, sino que, en general (aunque con alguna reserva que ahora no comentaremos), cualquier señal podrá ser engendrada como resultado de una combinación lineal de exponenciales complejas. Este hecho, de enorme importancia, vendrá a ser equiparable a lo que ya hemos visto que puede hacerse con las señales delta en (298) y (319). Y será el fundamento que nos permitirá trabajar con señales tanto en el dominio del tiempo como en el de la frecuencia: del mismo modo que ya hemos visto que las señales delta nos permiten representar todos los instantes posibles de tiempo sin interferirse las unas con las otras (y así engendrar cualquier señal en el dominio del tiempo), las señales exponenciales complejas permiten hacer lo propio con todas las frecuencias posibles, también sin interferirse mutuamente (y así permiten engendrar cualquier señal en el dominio de la frecuencia).

7.6. Otras señales típicas

Para terminar, vamos a ver tres señales analógicas también muy habituales en la práctica, algunas de las cuales se construyen a partir de algunas de las señales típicas ya estudiadas.

7.6.1. Señal pulso cuadrado

La **señal pulso cuadrado** es aquella **señal analógica cuya amplitud es $\mathbf{1}$ para un cierto intervalo finito de valores de la variable independiente y $\mathbf{0}$ en el resto**:

$$\Pi\left(\frac{t-t_0}{T}\right)=\begin{cases}1 & \text{para} \quad t\in\left[t_0-\frac{T}{2},t_0+\frac{T}{2}\right]\\ 0 & \text{para} \quad t\notin\left[t_0-\frac{T}{2},t_0+\frac{T}{2}\right]\end{cases} \tag{403}$$

siendo T el **ancho** del pulso cuadrado (o sea, la duración del intervalo de muestras de valor 1) y t_0 su instante central, allí donde $T,t_0\in\mathbb{R}$ y $T>0$.

En general, y dado que se trata de una señal muy habitualmente usada en la práctica, **el símbolo $\boldsymbol{\Pi}$ queda reservado para denotar la señal analógica pulso cuadrado**.

Vista su definición, la representación gráfica de $\Pi\left(\frac{t-t_0}{T}\right)$ se muestra en la Figura 44.

Se observa que **la señal pulso cuadrado permite acotar fácilmente cualquier señal finita analógica definida entre $\boldsymbol{t_1}$ y $\boldsymbol{t_2}$**, según la definición de (110). Simplemente, hay que definir T y t_0 de modo tal que $\boldsymbol{t_1=t_0-T/2}$ y $\boldsymbol{t_2=t_0+T/2}$. Sin embargo, para definir de forma compacta tanto una señal analógica definida por intervalos como el periodo básico de una señal periódica analógica, sigue siendo más útil la señal escalón unitario analógica. La razón de esto está, si nos fijamos en (265) y (267), en que los intervalos de definición de estas señales normalmente son cerrados por la izquierda y abiertos por la derecha, mientras que el intervalo de definición de la señal pulso cuadrado es cerrado tanto por la izquierda como por la derecha.

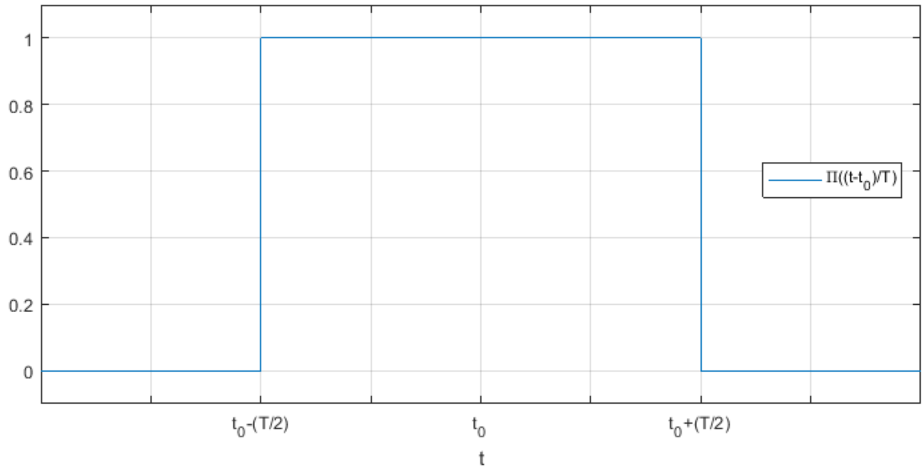

Figura 44. Representación gráfica de la señal pulso cuadrado.

Asimismo, es justamente esta la razón por la cual **la señal pulso cuadrado no puede ser expresada como la diferencia de dos escalones unitarios analógicos**: en (403), el límite por la izquierda está incluido en el intervalo de definición de la señal pulso cuadrado. Es por este motivo que sí tiene sentido definir la señal pulso cuadrado en el dominio analógico, pero no en el dominio digital, pues esta problemática no aparece en las señales discretas. Si quisiéramos definir una versión digital de la señal pulso cuadrado, no tendríamos más que restar dos escalones unitarios digitales convenientemente desplazados:

$$u\left[n-n_0+\left\lfloor\frac{N}{2}\right\rfloor\right]-u\left[n-n_0-\left\lfloor\frac{N+1}{2}\right\rfloor\right]=\begin{cases}1 \text{ si } n\in\left\{n_0-\left\lfloor\frac{N}{2}\right\rfloor,\dots,n_0+\left\lfloor\frac{N-1}{2}\right\rfloor\right\}\\ 0 \text{ si } n\notin\left\{n_0-\left\lfloor\frac{N}{2}\right\rfloor,\dots,n_0+\left\lfloor\frac{N-1}{2}\right\rfloor\right\}\end{cases} \quad (404)$$

allí donde $\lfloor N/2\rfloor$ es el mayor valor entero menor o igual que $N/2$, y donde $N,n_0\in\mathbb{Z}$ y $N>0$. La señal «pulso cuadrado digital» definida en (404) es de ancho N (tiene N muestras de valor 1); si N es impar, está centrada en la muestra n_0; y, si N es par, sus dos muestras centrales son n_0-1 y n_0. Así, con (111), vemos que se trata de una señal finita de amplitud 1 definida entre $n_1=n_0-\lfloor N/2\rfloor$ y $n_2=n_0+\lfloor (N-1)/2\rfloor$, y de amplitud 0 fuera de ese intervalo.

Finalmente, una señal periódica muy interesante que puede definirse a partir de la señal pulso cuadrado es **el tren de pulsos cuadrados** de ancho T y periodo fundamental T_0:

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\Pi\left(\frac{t-\frac{T}{2}-mT_0}{T}\right)=\cdots+\underbrace{\Pi\left(\frac{t-\frac{T}{2}+T_0}{T}\right)}_{m=-1}+\underbrace{\Pi\left(\frac{t-\frac{T}{2}}{T}\right)}_{m=0}+\underbrace{\Pi\left(\frac{t-\frac{T}{2}-T_0}{T}\right)}_{m=1}+\cdots \quad (405)$$

siendo $T_0>T$, allí donde $T,T_0\in\mathbb{R}$ y $T,T_0>0$.

Es fácil ver que la representación gráfica del tren de pulsos cuadrados es la siguiente:

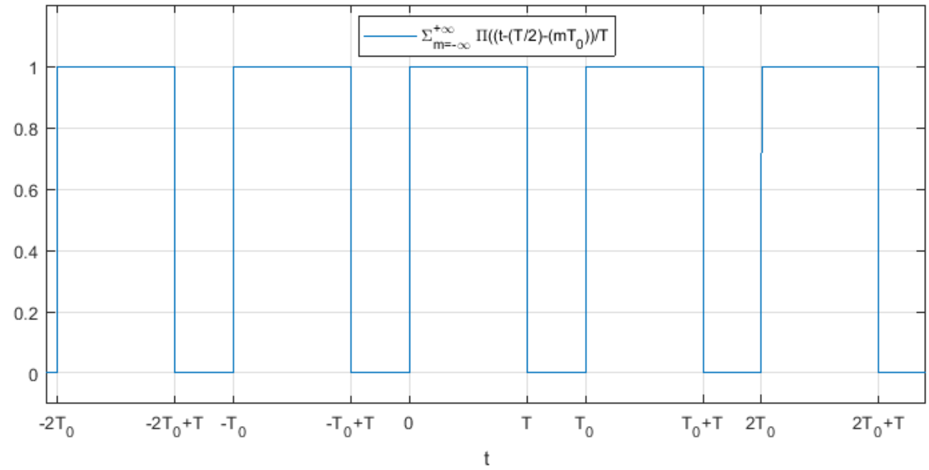

Figura 45. Representación gráfica de un tren de pulsos cuadrados.

Análogamente, la versión digital del tren de pulsos cuadrados se puede definir también muy fácilmente a partir de la extensión periódica a razón de N_0 muestras por periodo de la resta de escalones unitarios que define el intervalo $n \in \{0, \ldots, N-1\}$:

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} (u[n-mN_0] - u[n-N-mN_0]) = \cdots + \underbrace{u[n+N_0] - u[n-N+N_0]}_{m=-1} + \underbrace{u[n] - u[n-N]}_{m=0} + \underbrace{u[n-N_0] - u[n-N-N_0]}_{m=1} + \cdots \qquad (406)$$

siendo $N_0 \geq N$, allí donde $N, N_0 \in \mathbb{Z}$ y $N, N_0 > 0$.

7.6.2. Señal pulso triangular

La **señal pulso triangular** es aquella señal analógica definida como sigue:

$$\Lambda\left(\frac{t-t_0}{T}\right) = \begin{cases} 1 - 2\left|\frac{t-t_0}{T}\right| & \text{para} \quad t \in \left[t_0 - \frac{T}{2}, t_0 + \frac{T}{2}\right] \\ 0 & \text{para} \quad t \notin \left[t_0 - \frac{T}{2}, t_0 + \frac{T}{2}\right] \end{cases} \qquad (407)$$

siendo T el **ancho** del pulso triangular, y t_0 su instante central, con $T, t_0 \in \mathbb{R}$ y $T > 0$.

En general, y dado que también se trata de una señal muy usada en la práctica, **el símbolo Λ queda reservado para denotar la señal analógica pulso triangular**.

Vista su definición, la representación gráfica de $\Lambda\left(\frac{t-t_0}{T}\right)$ es la siguiente:

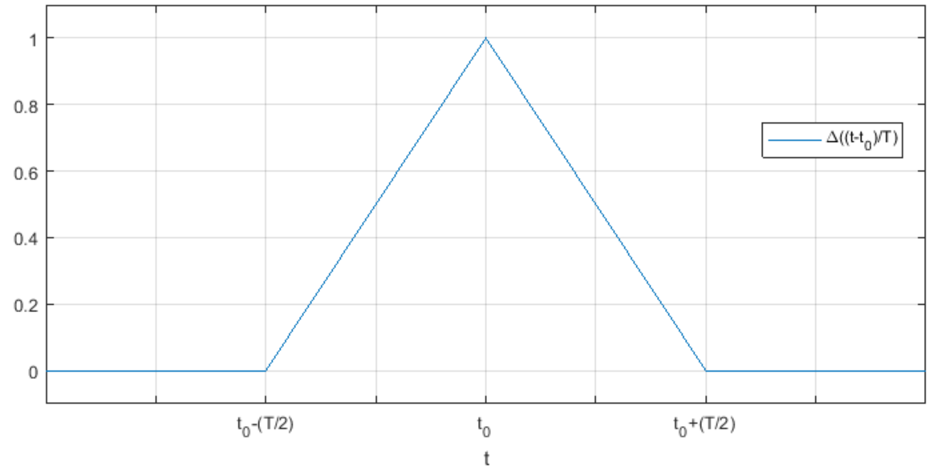

Figura 46. Representación gráfica de la señal pulso triangular.

Fácilmente, es posible expresar la señal pulso triangular a partir de la señal pulso cuadrado:

$$\Lambda\left(\frac{t-t_0}{T}\right)=\left(1-2\left|\frac{t-t_0}{T}\right|\right)\Pi\left(\frac{t-t_0}{T}\right) \tag{408}$$

Y, finalmente, a partir de la señal pulso triangular también puede definirse **el tren de pulsos triangulares** de ancho T y periodo fundamental T_0:

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\Lambda\left(\frac{t-\frac{T}{2}-mT_0}{T}\right)=\cdots+\underbrace{\Lambda\left(\frac{t-\frac{T}{2}+T_0}{T}\right)}_{m=-1}+\underbrace{\Lambda\left(\frac{t-\frac{T}{2}}{T}\right)}_{m=0}+\underbrace{\Lambda\left(\frac{t-\frac{T}{2}-T_0}{T}\right)}_{m=1}+\cdots \tag{409}$$

siendo $T_0 > T$, allí donde $T, T_0 \in \mathbb{R}$ y $T, T_0 > 0$.

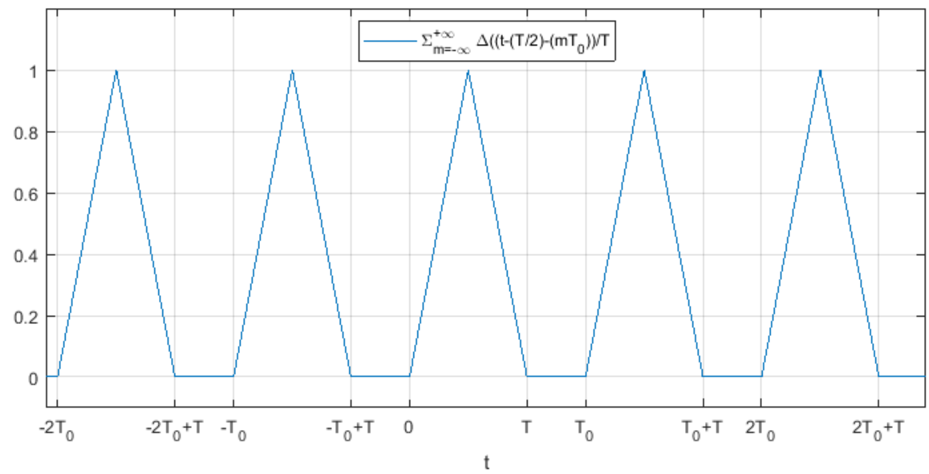

Figura 47. Representación gráfica de un tren de pulsos triangulares.

7.6.3. Señal sinc

La **señal sinc** (o **seno cardinal**) es aquella señal analógica definida como **el cociente del seno del argumento de la señal por π entre el argumento de la señal por π**:

$$\mathrm{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} \tag{410}$$

De entrada, conviene notar que la señal sinc presenta siempre una **singularidad evitable** en aquel valor de t que anula su argumento[38]. Si nos fijamos en (410), vemos que $\mathrm{sinc}(0) = 0/0$. Esta singularidad se resuelve muy fácilmente: bien aproximando el seno por su argumento ($\sin(\pi t) \approx \pi t$, cuando $t \to 0$), bien aplicando la regla de l'Hôpital, el resultado es $\mathrm{sinc}(0) = 1$.

Entonces, para caracterizar la señal sinc, lo más sencillo es atender a su representación gráfica:

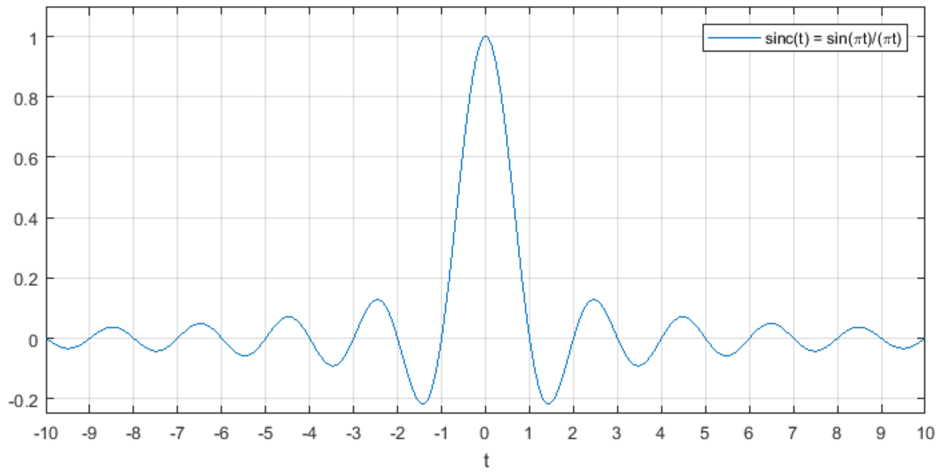

Figura 48. Representación gráfica de la señal sinc.

Se observa en la Figura 48 que la sinc es una señal **par** e **infinita orientada a ambos lados**, cuyos **pasos por cero** están situados en todos los valores enteros de t, salvo en $t = 0$:

$$\mathrm{sinc}(k) = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad k \neq 0 \\ 1 & \text{para} \quad k = 0 \end{cases}, \ \forall k \in \mathbb{Z} \tag{411}$$

Se observa también la distribución de lóbulos de la señal, que son infinitos:

- El lóbulo positivo de **ancho 2** ubicado en $t \in [-1,1]$ es el llamado **lóbulo principal**.
- Los lóbulos negativos de **ancho 1** ubicados en $t \in [-2,-1]$ y $t \in [1,2]$ son los llamados **lóbulos secundarios**.
- Los lóbulos positivos de **ancho 1** ubicados en $t \in [-3,-2]$ y $t \in [2,3]$ son los llamados **lóbulos terciarios**.
- Y así sucesivamente…

[38] Si definimos simbólicamente la señal sinc en MATLAB a partir de cómo está definida en la ecuación (410), no hemos de preocuparnos por esta singularidad, pues MATLAB la resuelve automáticamente.

En la práctica, algo muy habitual es definir la **señal sinc de amplitud A y ancho de lóbulo principal $2T$**; es decir:

$$A\,\mathrm{sinc}\left(\frac{t}{T}\right) = \frac{AT}{\pi t}\sin\left(\frac{\pi t}{T}\right) \tag{412}$$

Finalmente, y como curiosidad, resulta interesante conocer la relación entre la señal sinc y la delta de Dirac, que está basada en el cálculo de un límite. **El límite de la sinc multiplicada por el inverso de la mitad del ancho de su lóbulo principal cuando el ancho del lóbulo tiende a cero es una delta de Dirac**:

$$\lim_{T\to 0}\frac{1}{T}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{t}{T}\right) = \delta(t) \tag{413}$$

Y, también como curiosidad, en (411) se ve claramente que **muestrear la señal sinc con un periodo de muestreo de 1 segundo ($T_m = 1$) da como resultado la señal delta digital**:

$$\mathrm{sinc}[n] = \mathrm{sinc}(t=n) = \delta[n] = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad n \neq 0 \\ 1 & \text{para} \quad n = 0 \end{cases} \tag{414}$$

8. Analogía intuitiva entre señales y vectores

Para terminar módulo de introducción a las señales, a continuación se presenta y discute (de forma intuitiva, en términos informales y deliberadamente poco rigurosos desde un punto de vista matemático) una analogía entre el concepto de señal y el de vector. Conviene empezar aclarando que, de hecho, la «analogía» que da título a este apartado no es realidad una analogía, sino que se trata sin más de una relación de identidad, puesto que, digámoslo ya claramente de entrada, **las señales no son ni más ni menos que vectores**.

Lo que se pretende en este apartado es establecer la conexión existente entre señales y vectores en términos meramente conceptuales, a fin de poder aprovechar elementos básicos propios del aparato teórico del álgebra lineal (que, aplicados a vectores, nos son muy familiares: espacio vectorial, dimensiones de un espacio vectorial, producto escalar, módulo o norma de un vector, proyección de un vector sobre otro, combinación lineal de vectores, independencia lineal, base generadora del espacio, matriz de cambio de base, diagonalización de endomorfismos, autovectores, autovalores, etc.) y aplicarlos a las señales y a los sistemas. La idea es que esto nos permita comprender más adecuadamente y con mucha más profundidad en qué consiste la teoría de señales y sistemas que estamos estudiando aquí.

Entonces, lo que hay que entender de entrada es que tanto el conjunto de las señales analógicas como el conjunto de las señales digitales conforman sendos **espacios vectoriales**. Esto simplemente quiere decir que son conjuntos no vacíos de elementos (lo cual es obvio: el conjunto de las señales analógicas contiene a las señales analógicas y el conjunto de las señales digitales contiene a las señales digitales) sobre los que se definen una operación interna (la suma de dos señales da lugar a otra señal) y una operación externa (el producto de una señal por un escalar da lugar a otra señal) que cumplen toda una serie de propiedades. Así pues, en la medida en que los elementos que conforman un espacio vectorial son denominados vectores, **toda señal, ya sea analógica o digital, es un vector**.

En general, los espacios vectoriales en los que típicamente pensamos al manejar estos conceptos son los espacios euclídeos de dos y tres dimensiones (es decir, $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$), puesto que nos permiten fácilmente imaginar todo esto en términos geométricos. Bien, la diferencia fundamental existente entre estos espacios y los espacios de las señales analógicas y digitales está en la dimensión de los mismos: así como, por ejemplo, un vector $\bar{a}$ de $\mathbb{R}^3$ tiene tres dimensiones ($[a_x \; a_y \; a_z]$ es una secuencia de tres valores numéricos), **las señales son vectores de infinitas dimensiones** (pensemos, pues es el caso más fácil, en una señal digital explicitada numéricamente: es una secuencia de infinitos valores numéricos). La herramienta matemática que permite extrapolar las nociones algebraicas y geométricas propias de los espacios euclídeos de dos y tres dimensiones a los espacios vectoriales de dimensión infinita es el concepto de espacio de Hilbert, que no estudiaremos aquí, pero que, en términos intuitivos, no es más que la generalización del concepto de espacio euclídeo.

Así pues, tenemos que nuestras señales son vectores de infinitas dimensiones, pero vectores al fin y al cabo. **La gracia de que una señal no sea ni más ni menos que un vector reside en que todo aquello que sabemos acerca de los vectores, todos los conceptos y herramientas que conocemos, entendemos y sabemos aplicar tan bien al trabajar en espacios euclídeos de dos y tres dimensiones, también podemos aplicarlo en el caso de las señales**. Es más, de hecho, a lo largo de este mismo módulo ya lo hemos aplicado varias veces sin mayor problema.

Tomemos, por ejemplo, el concepto de energía de una señal, definido en las ecuaciones (207) y (208) del apartado 6.3, y comparémoslo con el concepto de módulo (o norma) de un vector: ambos conceptos son una y la misma cosa. El módulo de un vector se define como la raíz cuadrada positiva del producto escalar del vector por sí mismo y, por tanto, es el resultado de calcular la raíz cuadrada positiva de la suma de los productos de cada componente del vector por sí misma; o sea, en el caso de nuestro vector $\bar{a}$ de $\mathbb{R}^3$, su módulo no es más que:

$$\|\bar{a}\| = +\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \tag{415}$$

De nuevo para movernos en el caso en que la comparación se ve más claramente, si comparamos este cálculo con el de la energía de una señal digital definido en la ecuación (208), vemos que, salvo por la raíz cuadrada, ambos consisten en lo mismo (suma de los productos del valor absoluto de cada muestra de la señal por sí misma). De este modo, podemos entender que **la energía de una señal no es más que el cuadrado del módulo de la señal/vector**.

Un concepto muy importante en el álgebra lineal es el del producto escalar, que nos da una medida que cuánto se parecen entre sí dos vectores: si ambos definen la misma dirección del espacio, su producto escalar (normalizado por sus módulos) da 1 (máximo parecido posible entre vectores); si, por el contrario, ambos son ortogonales entre sí, su producto escalar da 0 (mínimo parecido posible entre vectores). Recordemos que calcular el producto escalar de dos vectores consiste en multiplicar cada una de sus componentes entre sí y sumar los resultados de todos los productos; o sea, siendo $\bar{a}$ y $\bar{b}$ dos vectores de $\mathbb{R}^3$:

$$\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle = (a_x b_x) + \left(a_y b_y\right) + (a_z b_z) \tag{416}$$

Bien, fijémonos ahora en las ecuaciones (297) y (318), en las que se calcula la suma del producto «punto a punto» de una señal cualquiera por una señal delta desplazada a un cierto instante de tiempo. Lo primero que hay que notar es que la operación que se está realizando tanto en (297) como en (318) es un **producto escalar entre dos señales**: se suma el resultado de multiplicar sus «componentes» entre sí, una a una. Por tanto, podemos interpretar estos cálculos como una medida del grado de parecido entre la señal y la delta desplazada. Claro, el resultado de la operación es el valor de amplitud de la señal en el instante en que está ubicada la delta, lo cual, obviamente, es una medida del grado de parecido entre ambas: si la señal vale 0 en ese instante, el resultado del producto escalar será 0 y ambas señales serán «ortogonales»; y cuanto mayor sea el valor de amplitud de la señal en ese instante, mayor será su grado de parecido con la delta ubicada en ese instante.

A este respecto, es muy importante darse cuenta de que los conjuntos de señales delta $\delta(t-t_i), \forall t_i \in \mathbb{R}$ y $\delta[n-n_i], \forall n_i \in \mathbb{Z}$ están formados por señales de módulo unitario:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\delta(t-t_i)|^2 dt = 1,\ \forall t_i \in \mathbb{R}$$
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\delta[n-n_i]|^2 = 1,\ \forall n_i \in \mathbb{Z} \tag{417}$$

y que todas ellas son «ortogonales» entre sí:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_i)\delta\left(t-t_j\right) dt = 0,\ \forall t_i, t_j \in \mathbb{R}, t_i \neq t_j$$
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n-n_i]\delta\left[n-n_j\right] = 0,\ \forall n_i, n_j \in \mathbb{Z}, n_i \neq n_j \tag{418}$$

Si tenemos en cuenta que, como ya hemos visto en las ecuaciones (298) y (319), cualquier señal puede ser engendrada como resultado de una **combinación lineal** de señales delta, a la luz del aparato conceptual del álgebra lineal:

- **El conjunto de señales delta $\boldsymbol{\delta(t-t_i)}, \forall \boldsymbol{t_i} \in \mathbb{R}$ es base generadora del espacio de las señales analógicas**.
- **El conjunto de señales delta $\boldsymbol{\delta[n-n_i]}, \forall \boldsymbol{n_i} \in \mathbb{Z}$ es base generadora del espacio de las señales digitales**.

Y, es más, ambas son **base ortonormal** de sus respectivos espacios de señales, puesto que, como hemos visto en (417) y (418), todos sus elementos tienen **módulo 1** y todos sus elementos son **linealmente independientes** entre sí: ninguna señal delta puede ser engendrada como resultado de una combinación lineal de las otras señales delta de la base, lo cual quiere decir que la información aportada por cada señal delta es novedosa (no la aporta nadie más); esto tiene todo el sentido del mundo, ya que es obvio que la información referente al instante de tiempo i-ésimo (la componente i-ésima de cualquier señal del espacio) la aporta únicamente $\delta(t-t_i)$, en el espacio de las señales analógicas, o $\delta[n-n_i]$, en el espacio de las señales digitales.

La comparación de estos dos conjuntos de señales delta con la base canónica de $\mathbb{R}^3$ (formada por los vectores $\bar{\imath} = [1\ 0\ 0]$, $\bar{\jmath} = [0\ 1\ 0]$, $\bar{k} = [0\ 0\ 1]$) nos confirma todo lo dicho y, además, hace que veamos que ambos conjuntos son, también, **base canónica** de sus respectivos espacios de señales. Del mismo modo que $\{\bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{k}\}$ es base canónica de $\mathbb{R}^3$ porque cada uno de los vectores de la base engendra una de las dimensiones que conforman dicho espacio, $\delta(t-t_i), \forall t_i \in \mathbb{R}$ y $\delta[n-n_i], \forall n_i \in \mathbb{Z}$ son, respectivamente, base canónica del espacio de las señales analógicas y las digitales: cada una de las dimensiones de ambos espacios (cada uno de los posibles instantes de tiempo continuo y discreto) es engendrada por una de las señales delta presentes en cada una de las bases. Se observa que la «analogía» es exacta:

$$\langle \bar{a}, \bar{\imath} \rangle = a_x \qquad \langle \bar{a}, \bar{\jmath} \rangle = a_y \qquad \langle \bar{a}, \bar{k} \rangle = a_z$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t - t_i)dt = x(t_i),\ \forall t_i \in \mathbb{R}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\delta[n - n_i] = x[n_i],\ \forall n_i \in \mathbb{Z} \tag{419}$$

Y, por el momento, que todo lo dicho sirva para no perder de vista que, en el fondo, la teoría de señales y sistemas viene a proporcionar un marco matemático, pero también conceptual, desde el que poder modelizar cualquier situación, escenario de trabajo o problema práctico que seamos capaces de expresar en términos de señales y sistemas.

En módulos posteriores, tanto podremos profundizar aún más en la «analogía» aquí presentada, como ampliarla con nuevos conceptos y herramientas. Por ejemplo, llegado el momento, veremos que, del mismo modo que una señal no es más que un vector de dimensión infinita, todo sistema perteneciente a una cierta familia de sistemas (la de los sistemas lineales e invariantes en el tiempo) no es más que una matriz de dimensión infinita que, mediante el producto matricial, transforma una señal (señal de entrada del sistema) en otra (señal de salida del sistema).

Y también, llegado el momento, veremos otras familias de señales distintas a las de las señales delta (concretamente, familias de señales exponenciales complejas) que también pueden ser consideradas bases generadoras del espacio de las señales. Lo cual nos llevará a introducir el concepto de «transformada de una señal», el cual, en el fondo, es equivalente la noción algebraica de cambio de base: dada una señal representada en el dominio temporal (es decir, engendrada mediante una base de señales delta), seremos capaces de representar esa misma señal en otros dominios, como por ejemplo el frecuencial (es decir, de engendrarla mediante una base de exponenciales complejas). En todo caso, ya iremos llegando poco a poco a estas cuestiones y las estudiaremos en detalle a medida que vayamos profundizando en la teoría.

Resumen

En este módulo, hemos iniciado una introducción a la teoría de señales y sistemas, limitando nuestro estudio, sin que ello implique una pérdida de generalidad, a las señales analógicas y digitales de una variable independiente (señales unidimensionales).

En términos generales, hemos estudiado sus operaciones básicas, sus transformaciones más habituales, los diferentes tipos de señales que podremos llegar a manejar, cuáles son los parámetros básicos más comúnmente utilizados para caracterizarlas, y las señales típicas con las que más habitualmente se trabaja en la práctica. A este respecto, hemos destacado el gran interés de las señales delta y las señales exponenciales complejas, las cuales tendrán una importancia capital a lo largo de la teoría que se desarrolla en los módulos posteriores.

Finalmente, hemos resaltado también el hecho de que las señales no son otra cosa que vectores, lo cual nos permite aplicar el aparato conceptual propio del álgebra lineal a la teoría de señales y sistemas. En este sentido, resulta especialmente crucial el hecho, expresado en las ecuaciones (298) y (319), de que cualquier señal puede ser engendrada como resultado de una combinación lineal de señales delta.

En el siguiente módulo, completaremos esta introducción a la teoría de señales y sistemas ocupándonos de los sistemas: definiremos qué es un sistema y cuál es su notación matemática, veremos cómo modelizarlos mediante su relación entrada-salida, así como en forma de diagrama de bloques, introduciremos los sistemas típicos más habituales en la práctica, las distintas formas básicas de asociación de sistemas y, sobre todo, las diferentes propiedades que puede poseer o no un sistema.

Ejercicios de autoevaluación

1. Respecto de la señal $x(t) = -u(-t+2)\delta(t+5)\cos(\pi t) - 1$, ¿cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas?

(a) $x(t) = 0$.

(b) $x(t) = \delta(t+5)$.

(c) $x(t) = -\delta(t+5) - 1$.

(d) $x(t) = \delta(t+5) - 1$.

2. Respecto de la señal $x[n] = -u[-n+2]\delta[n+5]\sin(3\pi n) - 1$, ¿cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas?

(a) $x[n] = 0$.

(b) $x[n] = 1$.

(c) $x[n] = -1$.

(d) $x[n] = -\delta[n+5] - 1$.

3. Respecto de la señal $x(t) = u(t) - u(t-1)$, ¿cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas?

(a) Su *offset* es igual a 0.

(b) Su *offset* entre $t = 0$ y $t = 2$ es igual a $\frac{1}{2}$.

(c) Su energía es finita y su potencia media es igual a 0.

(d) Su energía y su potencia media entre $t = 0$ y $t = 1$ son iguales a 1.

4. Respecto de la señal $x[n] = u[-3n+7]$, ¿cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas?

(a) $x[n] = u[-n+6]$.

(b) $x[n] = u[-n-6]$.

(c) $x[n] = u[-n+2]$.

(d) $x[n] = u[-n-2]$.

5. Respecto del muestreo de la señal $x(t) = \sin(2\pi t)$, ¿cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas?

(a) A razón de $T_m = 1\ seg.$, da lugar a la señal $x[n] = 0$.

(b) A razón de $T_m = \frac{1}{4}\ seg.$, da lugar a la señal $x[n] = \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)$.

(c) A razón de $T_m = \frac{1}{10}\ seg.$, da lugar a la señal $x[n] = \sin\left(\frac{\pi}{5}n\right)$.

(d) A razón de $T_m = \frac{\pi}{2}\ seg.$, da lugar a la señal $x[n] = \cos(2\pi n)$.

6. Respecto de una señal $x[n]$ cuya amplitud es 1 para todo valor par de n, y -1 para todo valor impar de n, ¿cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas?

(a) $x[n]$ es una señal periódica con un periodo fundamental de dos muestras.

(b) $x[n]$ es la extensión periódica de la señal $x_0[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$, a razón de dos muestras por periodo.

(c) $x[n] = \cos(\pi n)$.
(d) $x[n] = (-1)^n$.
(e) $x[n] = e^{j\pi n}$.
(f) $x[n] = e^{-j\pi n}$.

Soluciones a los ejercicios de autoevaluación

1. La respuesta correcta es la **(d)**.

2. La respuesta correcta es la **(c)**.

3. Todas las respuestas son correctas.

4. La respuesta correcta es la **(c)**.

5. Las respuestas **(a)**, **(b)** y **(c)** son correctas.

6. Todas las respuestas son correctas.

Bibliografía

Oppenheim, A. V., Schafer, R. W., & Buck, J. R. (1999). *Discrete-Time Signal Processing* (2nd ed.). Prentice Hall, Signal Processing Series (Capítulo 2).

Oppenheim, A. V., Willsky, A. S., & Nawab, S. H. (1996). *Signals & Systems* (2nd ed.). Prentice Hall, Signal Processing Series (Capítulo 1).

Palm III, W. J. (2010). *Introduction to MATLAB for Engineers* (3rd ed.). McGraw-Hill.

Proakis, J. G., & Manolakis, D. G. (2007). *Digital Signal Processing* (4th ed.). Prentice Hall (Capítulos 1 y 2).