Universitat Oberta de Catalunya (UOC)

Sistemas analógicos y digitales

Introducción a los sistemas de variable continua (analógicos) y de variable discreta (digitales)

Germán Cobo Rodríguez
30/04/2018

Índice

Introducción

¿Qué es un sistema? ¿Cuáles son su utilidad e interés en los ámbitos de trabajo y conocimiento de las ingenierías? En continuación directa con el módulo anterior, el presente módulo nos sirve para completar los marcos conceptual, matemático y práctico en los que se desarrolla toda la teoría de señales y sistemas.

En la primera sección, se da la definición básica de sistema y se especifica su notación matemática. Asimismo, se determinan las clases de sistemas de las que se ocupa la teoría que se desarrolla tanto en este módulo como en los posteriores. A continuación, el resto de secciones del módulo están dedicadas a proporcionar las herramientas básicas que se requieren para trabajar con sistemas: su caracterización matemática, los sistemas básicos más habitualmente usados en la práctica, las propiedades de los sistemas, etc.

A lo largo del módulo, los diferentes desarrollos teóricos son ilustrados mediante ejercicios planteados y resueltos a modo de ejemplo. Finalmente, en la sección Resumen se repasan los conceptos más importantes que se han desarrollado a lo largo del módulo y, a continuación, se plantean varios ejercicios de autoevaluación, acompañados de sus respectivas soluciones, pensados para trabajar precisamente dichos conceptos.

Objetivos

Los principales objetivos de este módulo son los siguientes:

1. Saber qué es un sistema, en el marco de la teoría de señales y sistemas, y conocer cuáles son los ámbitos de aplicación del concepto de sistema.
2. Conocer cuál es la relación y qué diferencias hay entre los sistemas analógicos, digitales e híbridos.
3. Conocer la notación matemática propia de la teoría de señales y sistemas.
4. Saber qué hace un sistema y ser capaz de modelizarlo, bien expresando matemáticamente su relación entrada-salida, bien representando gráficamente su diagrama de bloques.
5. Conocer los sistemas más típicamente usados en la práctica.
6. Saber demostrar qué propiedades posee o no posee un sistema.

1. Introducción a los sistemas analógicos y digitales

En esta primera sección se introduce, en primer lugar, la noción básica de sistema (apartado 1.1) y, a continuación, se establecen el marco conceptual y el método de notación matemática (apartado 1.2) necesarios para poder trabajar con sistemas en la teoría de señales y sistemas.

1.1. ¿Qué es un sistema?

Informalmente, **cualquier acción en la que aparezcan, se manipulen o se transformen una o varias señales puede ser considerada un sistema**. En general, los sistemas se modelizan mediante un conjunto de operaciones matemáticas que se aplican sobre un conjunto de señales. Por tanto, más formalmente, **un sistema es un procedimiento de transformación que, partiendo de un conjunto de señales (señales de entrada del sistema), da lugar a otro conjunto de señales (señales de salida del sistema)**.

Por tanto, es también posible encontrar ejemplos de sistemas en los mismos ámbitos y disciplinas en los que se encuentran ejemplos de señales:

- **Electrónica**: un circuito RLC que realce las altas frecuencias frente a las bajas.
- **Audio**: un amplificador de potencia que alimente unos altavoces.
- **Imagen**: un filtro que suavice las variaciones de intensidad entre píxeles vecinos.
- **Vídeo**: un algoritmo de compresión de vídeo digital.
- **Comunicaciones**: un demodulador de señales radio moduladas en frecuencia.
- **Antenas**: un sistema de adaptación de impedancias basado en líneas de transmisión para alimentar una antena.
- **Economía**: un simulador que analice la viabilidad económica de un proyecto.
- **Meteorología**: un estimador de la probabilidad de precipitación basado en datos meteorológicos de días anteriores.
- **Docencia**: un algoritmo de cálculo de la nota final de una asignatura a partir de las notas parciales.

Nótese que para dar la definición de qué es un sistema hemos usado el concepto de señal. Así, y análogamente, los sistemas también poseen ciertas características generales que conviene considerar: pueden admitir una o más señales de entrada, y una o más señales de salida; procesar señales analógicas, discretas o de ambos tipos; tener un comportamiento lineal o no lineal; su comportamiento puede variar o no con el tiempo, etc. En el siguiente apartado de esta sección, así como en el resto de secciones de este mismo módulo, se da cuenta de toda esta diversidad de características de los sistemas.

1.2. Sistemas de una entrada y una salida

En este apartado, se especifica el tipo de sistemas al que se va a limitar nuestro estudio, y se detalla la notación matemática necesaria para poder modelizarlos en términos algebraicos.

En primer lugar, nuestra teoría de señales y sistemas se limita, sin pérdida de generalidad, al estudio de **sistemas de una entrada y una salida**, es decir, sistemas que reciben **una única señal unidimensional de entrada** y generan **una única señal unidimensional de salida**.

Y, en segundo lugar, dependiendo del tipo de señales que reciben y generan, cabe distinguir entre tres grandes tipos de sistemas de una entrada y una salida: **sistemas analógicos**, **sistemas digitales** y **sistemas híbridos**.

Un **sistema analógico** (o sistema continuo) es aquel sistema cuyas **señales de entrada y de salida son analógicas**.

Un **sistema digital** (o sistema discreto) es aquel sistema cuyas **señales de entrada y de salida son digitales**.

Un **sistema híbrido** es aquel sistema cuya **señal de entrada es analógica y cuya señal de salida es digital, o viceversa**.

Teniendo en cuenta todas estas consideraciones y sin pérdida de generalidad, a continuación se establece **la notación matemática utilizada para representar sistemas**:

Los **sistemas** son denotados habitualmente mediante la letra S (que, cuando resulte conveniente, puede ser indexada mediante subíndices): S, S_1, S_2, S_N, etc.

La **señal de entrada** de un sistema es denotada habitualmente como $x(t)$ o $x[n]$, dependiendo de si dicha señal es analógica o digital, respectivamente. De modo análogo, la **señal de salida** de un sistema es denotada habitualmente como $y(t)$ o $y[n]$.

La **transformación** según la cual la señal de entrada de un sistema S es transformada en la señal de salida es denotada como T_S. Así, la expresión $y(t) = T_S\{x(t)\}$ denota que «$y(t)$ es la salida del sistema S cuando la entrada es $x(t)$» e indica que S es un sistema analógico (pues sus señales de entrada y de salida lo son). Análogamente, la expresión $y[n] = T_S\{x[n]\}$ indica que S es un sistema digital, mientras que las expresiones $y[n] = T_S\{x(t)\}$ o $y(t) = T_S\{x[n]\}$ indican que S es un sistema híbrido.

En general, la transformación que un sistema aplica a su señal de entrada para generar su señal de salida es denominada **relación entrada-salida** del sistema, la cual puede ser expresada tanto algebraicamente, en forma de **ecuación matemática**, como gráficamente, en forma de **diagrama de bloques**.

La Figura 1 ilustra la **representación gráfica de sistemas** en forma de diagrama de bloques.

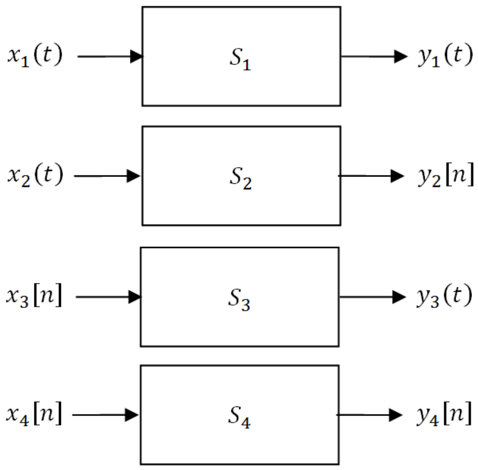

Figura 1. Representación gráfica de sistemas: S_1 es un sistema analógico, S_2 y S_3 son sistemas híbridos (analógico-digital y digital-analógico, respectivamente), y S_4 es un sistema digital.

Como en el caso de la limitación a las señales unidimensionales (señales de una variable independiente), conviene tener siempre presente que limitarnos al estudio de sistemas de una entrada y una salida no da como resultado una notación, unas representaciones y, en general, toda una teoría de señales y sistemas que ya no sirvan si se da el caso que haya que trabajar con sistemas de varias entradas y salidas. Estos casos requieren, por supuesto, de extender esta notación y de ampliar la teoría, pero no de rechazarlas para tener que construir unas nuevas desde cero. Dicho esto, nuestro interés se centra en la teoría básica de señales y sistemas, que se limita a los sistemas de una entrada y una salida, y que se puede generalizar y extender a casos más complejos.

En las secciones siguientes de este módulo, se introducen las herramientas básicas necesarias para trabajar con sistemas analógicos y digitales. Como acabamos de ver, existen sistemas analógicos (señales de entrada y de salida analógicas), sistemas digitales (señales de entrada y de salida digitales) y sistemas híbridos (señal de entrada analógica y señal de salida digital, y viceversa). En este módulo, solo nos ocuparemos de los dos primeros tipos. En general, en la teoría de señales y sistemas, los sistemas híbridos quedan reducidos a la cuestión de la conversión analógica/digital y digital/analógica, un primer esbozo de la cual ya fue establecida en el apartado 1.3 del módulo anterior y que será tratada en detalle en módulos posteriores.

Así, las dos formas más habituales de modelizar un sistema (su relación entrada-salida y su diagrama de bloques) son presentadas en la sección 2. Seguidamente, en la sección 3 se caracteriza todo un conjunto de sistemas típicos, tanto analógicos como digitales, muy utilizados en la práctica y que aparecerán constantemente en los módulos posteriores. Y, finalmente, en la sección 4 se presentan las principales propiedades de los sistemas, su formulación matemática, su desarrollo conceptual y las diferentes estrategias que pueden seguirse a la hora de demostrar si un sistema posee o no una determinada propiedad.

2. Relación entrada-salida y diagrama de bloques de un sistema

En la definición de sistema que se ha propuesto en el apartado 1.1, ya se establece que lo que nos encontramos al enfrentarnos a cualquier sistema es con un procedimiento de transformación, con toda una serie de operaciones y manipulaciones consistentes en transformar una señal (la señal de entrada del sistema) en otra señal distinta (la señal de salida del sistema).

A este respecto, existen dos formas diferentes de expresar qué hace un sistema, de modelizar **en qué consiste la transformación a la que somete el sistema a su señal de entrada para obtener su señal de salida**:

- La relación entrada-salida de un sistema lo expresa en términos matemáticos.
- El diagrama de bloques de un sistema lo expresa en términos gráficos.

Como a continuación veremos, ambas formas son equivalentes e intercambiables, puesto que ambas contienen y proporcionan exactamente la misma información. De hecho, dado un sistema, conocer su relación entrada-salida es conocer su diagrama de bloques, y viceversa. Incluso, y lo que es más importante: **conocer la relación entrada-salida de un sistema, o conocer su diagrama de bloques, es equivalente a conocer el sistema en su totalidad**, a saber exactamente qué ha hecho, qué está haciendo y qué hará el sistema en cualquier momento con cualquier señal que se presente en su entrada.

La **relación entrada-salida** de un sistema S es una **expresión algebraica que indica cómo calcular la señal de salida del sistema en función de la señal de entrada del sistema**:

$$y(t) = T_S\{x(t)\} \qquad (1)$$

$$y[n] = T_S\{x[n]\} \qquad (2)$$

siendo S un sistema analógico en (1), donde $x(t)$ es su señal de entrada e $y(t)$ es su señal de salida, y siendo S un sistema digital en (2), donde $x[n]$ es su señal de entrada e $y[n]$ es su señal de salida.

A continuación se proponen varios ejemplos muy sencillos de posibles relaciones entrada-salida:

- Sistema en el que la salida es directamente igual a la entrada:

$$y(t) = x(t) \qquad (3)$$

$$y[n] = x[n] \qquad (4)$$

- Sistema en el que la salida es igual a la entrada más una constante:

$$y(t) = x(t) + K \tag{5}$$

$$y[n] = x[n] + K \tag{6}$$

siendo K una constante, en general, compleja ($K \in \mathbb{C}$).

- Sistema en el que la salida es igual a la entrada por una constante:

$$y(t) = Kx(t) \tag{7}$$

$$y[n] = Kx[n] \tag{8}$$

siendo K una constante, en general, compleja ($K \in \mathbb{C}$).

- Sistema en el que la salida es igual a una versión retrasada de la entrada:

$$y(t) = x(t - t_0) \tag{9}$$

$$y[n] = x[n - n_0] \tag{10}$$

siendo t_0 y n_0 constantes positivas, con $t_0 \in \mathbb{R}$ y $n_0 \in \mathbb{Z}$.

De este modo, **conocer la relación entrada-salida de un sistema permite tanto saber cuáles son todas las propiedades que posee el sistema, como calcular cuál es la salida del sistema ante cualquier señal de entrada**.

Seguidamente, se plantea un ejemplo sencillo a fin de ilustrar cómo se obtiene la señal de salida de un sistema, conocidas su relación de entrada-salida y su señal de entrada.

Ejemplo 1

Sean dos sistemas S_1 y S_2, el primero analógico, el segundo digital, cuyas relaciones entrada-salida son las siguientes:

$$y(t) = T_{S_1}\{x(t)\} = x(t) - x\left(t - \frac{1}{2}\right) \tag{11}$$

$$y[n] = T_{S_2}\{x[n]\} = x[n] - x[n-1] \tag{12}$$

Se pide:

a) Obtener la salida de S_1 cuando su entrada es una señal escalón unitario.
b) Obtener la salida de S_2 cuando su entrada es una señal escalón unitario.

Solución

a) Tomando el escalón unitario analógico como señal de entrada ($x(t) = u(t)$), calcular la señal de salida de S_1 consiste simplemente en sustituir $x(t)$ por $u(t)$ en la relación entrada-salida del sistema:

$$y(t) = T_{S_1}\{x(t) = u(t)\} = u(t) - u\left(t - \frac{1}{2}\right) = \begin{cases} 1 & \text{para} \quad t \in [0, 1/2) \\ 0 & \text{para} \quad t \notin [0, 1/2) \end{cases} \tag{13}$$

b) Análogamente, calcular la señal de salida de S_2 ante un escalón unitario consiste simplemente en sustituir $x[n]$ por $u[n]$ en la relación entrada-salida del sistema:

$$y[n] = T_{S_2}\{x[n] = u[n]\} = u[n] - u[n-1] = \delta[n] \tag{14}$$

En general, resulta ser de particular importancia aquella señal que un sistema presenta en su salida cuando es excitado mediante una señal delta:

La **respuesta impulsional** de un sistema S es **la señal de salida de sistema cuando su entrada es una señal delta**:

$$\boxed{h(t) = T_S\{\delta(t)\}} \tag{15}$$

$$\boxed{h[n] = T_S\{\delta[n]\}} \tag{16}$$

allí donde $h(t)$ es la respuesta impulsional del sistema analógico S, y donde $h[n]$ es la respuesta impulsional del sistema digital S.

En general, y dado que se trata de una señal de gran relevancia en la teoría de señales y sistemas, **la letra $\boldsymbol{h}$ queda reservada para denotar la respuesta impulsional**.

En el módulo siguiente veremos que la respuesta impulsional cobra especial importancia en los sistemas lineales e invariantes en el tiempo (las propiedades de los sistemas son estudiadas en detalle en la sección 4 de este mismo módulo). En todo caso, existe una clasificación muy habitual de los sistemas que atiende a la longitud de su respuesta impulsional:

Se dice que S es un **sistema FIR** (del inglés, *Finite Impulse Response*) si **su respuesta impulsional es una señal finita**:

$$h(t) = T_S\{\delta(t)\} = 0, \forall t \notin [t_1, t_2] \tag{17}$$

$$h[n] = T_S\{\delta[n]\} = 0, \forall n \notin \{n_1, \dots, n_2\} \tag{18}$$

allí donde t_1, t_2, n_1 y n_2 son valores finitos arbitrarios tales que t_1, $t_2 \in \mathbb{R}$ y n_1, $n_2 \in \mathbb{Z}$, siendo $t_1 \leq t_2$ y $n_1 \leq n_2$.

Se dice que S es un **sistema IIR** (del inglés, *Infinite Impulse Response*) si **su respuesta impulsional es una señal infinita**; es decir, si no cumple con la condición establecida en (17)-(18).

Así, por ejemplo, tanto los sistemas definidos en las ecuaciones (3)-(10), como los sistemas S_1 y S_2 del Ejemplo 1 son todos sistemas FIR. Ejemplos sencillos de sistemas IIR pueden encontrarse en el apartado 3.8 de este mismo módulo.

Entonces, la información expresada por la relación entrada-salida de un sistema puede también ser expresada en otros términos mediante el diagrama de bloques del sistema.

El **diagrama de bloques** de un sistema S es una **representación gráfica que, mediante bloques funcionales y líneas de flujo, indica cómo la señal de salida del sistema es obtenida a partir de la señal de entrada del sistema**.

Aunque los bloques más habitualmente usados en la práctica son presentados en la sección 3 de este mismo módulo, en la Figura 2 se muestran, a modo de ejemplo, los diagramas de bloques de los sistemas anteriormente definidos en las ecuaciones (3), (6), (7) y (10):

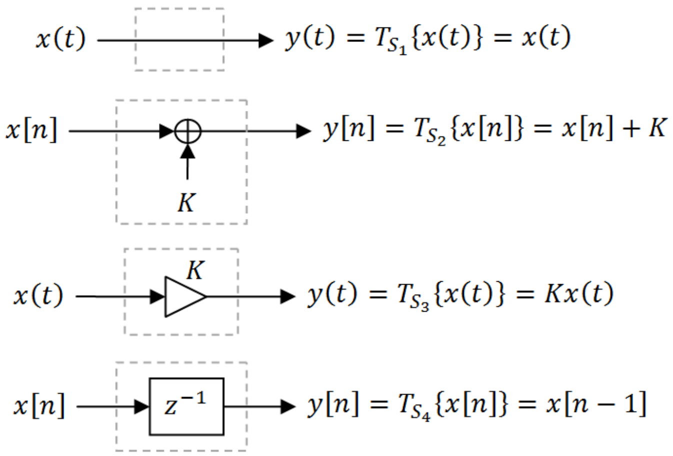

Figura 2. Ejemplos sencillos de diagramas de bloques.

Análogamente a lo que sucede con la relación entrada-salida, **conocer el diagrama de bloques de un sistema permite tanto saber cuáles son todas las propiedades que posee el sistema, como calcular cuál es la salida del sistema ante cualquier señal de entrada**.

En general, es trivial obtener el diagrama de bloques de un sistema a partir de su relación entrada-salida, y viceversa. De hecho, cuando un sistema es desconocido es porque no se conoce ni su relación entrada-salida ni su diagrama de bloques. En esos casos, se acostumbra a hablar de sistemas «caja negra», cuya representación algebraica se limita a la simbología presentada en (1)-(2) y cuya representación gráfica es simplemente una caja sin ningún contenido en su interior que recibe la señal de entrada por un lado y que entrega la señal de salida por el otro. Un ejemplo de representación gráfica de sistemas «caja negra» se encuentra en la Figura 1.

3. Sistemas típicos

En esta sección se presentan y caracterizan los bloques funcionales más típicamente utilizados en la práctica, los cuales, por sí solos, dan lugar a los sistemas más sencillos que nos podremos encontrar y, combinándose entre sí, permiten construir sistemas mucho más complejos.

En general, no todas las operaciones entre señales y transformaciones de señales que hemos estudiado en el módulo anterior tienen una representación habitual en forma de bloque funcional, puesto que no todas ellas acostumbran a implementarse en la práctica. En todo caso, si en algún momento puntual se requiere implementar una operación o transformación poco habitual cuyo bloque funcional no está definido, siempre es posible definirlo en ese momento y para esa situación concreta.

Asimismo, al final de esta sección se introducen la representación de bucles de realimentación en un sistema (siempre presentes en los sistemas IIR) y las formas más habituales de interconexión de sistemas.

3.1. Sistema escalador

El **sistema escalador** es aquel sistema en que **la señal de salida es el resultado del producto de la señal de entrada por una constante**:

$$y(t) = Kx(t) \tag{19}$$

$$y[n] = Kx[n] \tag{20}$$

siendo K una constante, en general, compleja ($K \in \mathbb{C}$).

Gráficamente, el sistema escalador se implementa mediante **el bloque funcional que representa el escalado en factor K de la señal**, tal y como se muestra en la Figura 3.

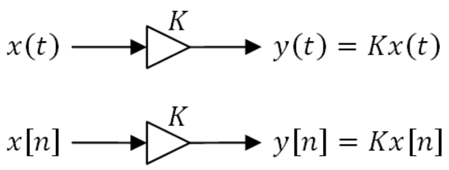

Figura 3. Bloque funcional escalador.

Habitualmente, y atendiendo al valor de $|K|$, se manejan las siguientes denominaciones:

- Si $|K| > 1$, el sistema escalador es denominado **amplificador**.
- Si $|K| < 1$, el sistema escalador es denominado **atenuador**.

3.2. Sistema sumador

El **sistema sumador** es aquel sistema en que **la señal de salida es el resultado de la suma de un número finito de señales**:

$$y(t) = \sum_{i=1}^{M} x_i(t) \tag{21}$$

$$y[n] = \sum_{i=1}^{M} x_i[n] \tag{22}$$

siendo M el número de señales sumadas ($M \in \mathbb{N}, M > 1$).

En términos gráficos, el sistema sumador se implementa mediante **el bloque funcional que representa la suma de varias señales**, tal y como se muestra en la Figura 4.

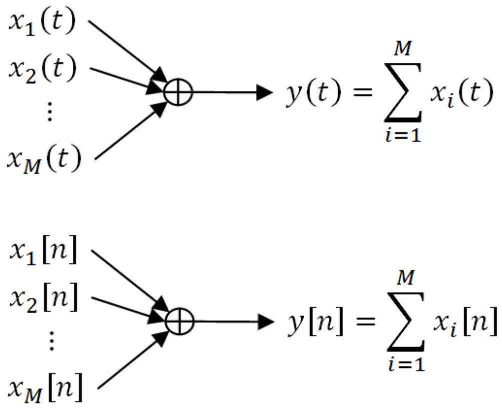

Figura 4. Bloque funcional sumador.

En general, y puesto que trabajamos con sistemas de una entrada y una salida, el bloque sumador se acostumbra a utilizar de modo que una o ninguna de las señales sumadas es directamente la señal de entrada del sistema, y el resto son señales internas generadas por el propio sistema (como, por ejemplo, en el sistema S_1 ilustrado en la Figura 5) o señales provenientes de otros bloques funcionales que también formen parte de la implementación del sistema (como, por ejemplo, en el sistema S_2 ilustrado en la Figura 5).

Del mismo modo que se ha definido el bloque sumador, también podría definirse un bloque restador para implementar la resta de señales. Lo habitual, sin embargo, suele ser trabajar solo con el bloque sumador y, en caso que se requiera restar alguna señal, indicar el signo que hay que aplicarle a cada señal en las flechas de entrada al bloque (como, por ejemplo, en el sistema S_1 ilustrado en la Figura 5), o bien usar el bloque escalador para cambiar el signo de aquellas señales que se desee restar (como, por ejemplo, en el sistema S_2 ilustrado en la Figura 5).

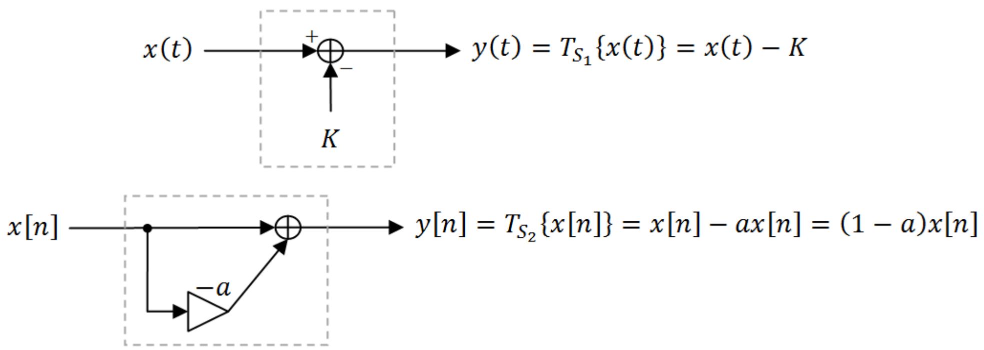

Figura 5. Ejemplos de uso del bloque sumador.

3.3. Sistema multiplicador

El **sistema multiplicador** es aquel sistema en que **la señal de salida es el resultado del producto de un número finito de señales**:

$$y(t) = \prod_{i=1}^{M} x_i(t) \tag{23}$$

$$y[n] = \prod_{i=1}^{M} x_i[n] \tag{24}$$

siendo M el número de señales multiplicadas ($M \in \mathbb{N}, M > 1$).

Gráficamente, el sistema multiplicador se implementa mediante **el bloque funcional que representa el producto de varias señales**, tal y como se muestra en la Figura 6.

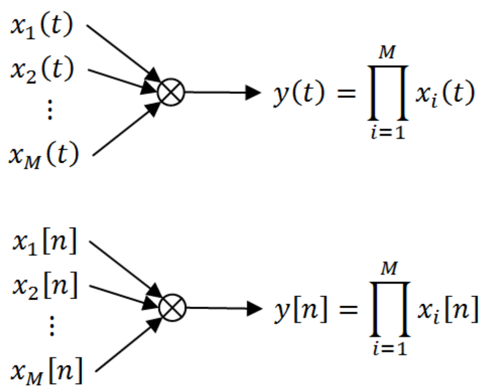

Figura 6. Bloque funcional multiplicador.

Análogamente a lo que sucede con el sumador, puesto que trabajamos con sistemas de una entrada y una salida, el bloque multiplicador se acostumbra a utilizar de modo que una o ninguna de las señales multiplicadas es directamente la señal de entrada del sistema, y el resto son señales internas generadas por el propio sistema o señales provenientes de otros bloques funcionales que también formen parte de la implementación del sistema, tal y como se ilustra en los ejemplos de la Figura 7.

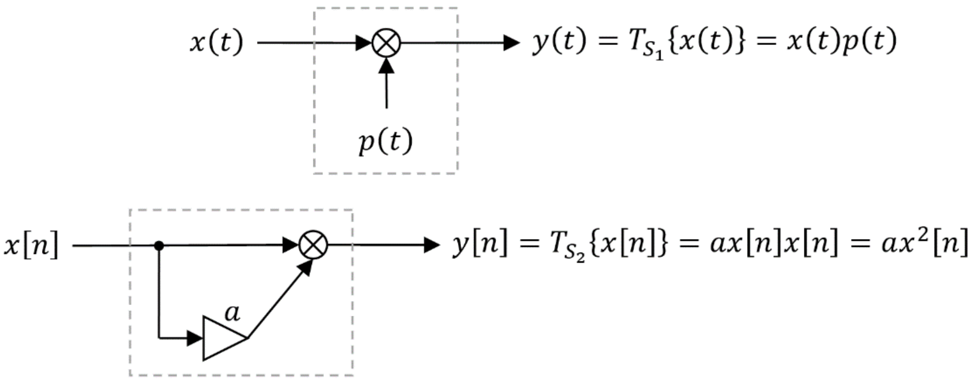

Figura 7. Ejemplos de uso del bloque multiplicador.

En general, no acostumbra a trabajarse con bloques que representen la división o la potencia de señales. En todo caso, como ya se ha comentado al inicio de este apartado, si en algún momento se necesitasen tales bloques funcionales, siempre podrían definirse *ad hoc*. Y, por supuesto, ello no supone ninguna limitación seria: **es perfectamente válido trabajar con relaciones entrada-salida de sistemas que calculan divisiones y potencias entre señales**.

3.4. Sistema derivador

El **sistema derivador** es aquel **sistema analógico** en que **la señal de salida es la derivada de la señal de entrada respecto de la variable independiente**:

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \qquad (25)$$

Gráficamente, el sistema derivador se implementa mediante **el bloque funcional que representa el cálculo de la derivada de la señal**, tal y como se muestra en la Figura 8.

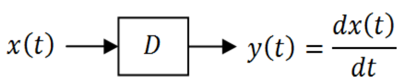

Figura 8. Bloque funcional derivador.

En general, para obtener derivadas de orden superior (la derivada segunda de una señal, la derivada tercera de una señal, etc.), basta con concatenar el bloque funcional derivador tantas veces como sea el orden de la derivada que se tenga que calcular, tal y como se ilustra en la Figura 9.

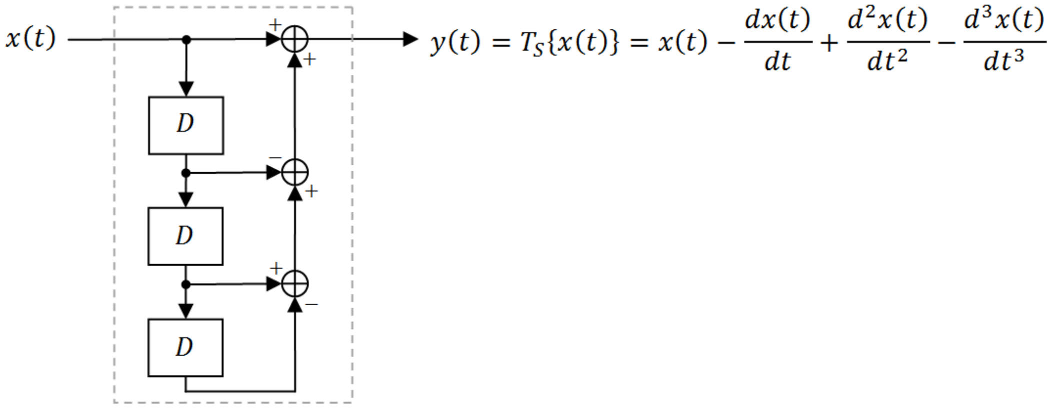

Figura 9. Ejemplo de uso del bloque derivador.

3.5. Sistema integrador (o acumulador)

El **sistema integrador** (también conocido como **sistema acumulador**) es aquel **sistema analógico** en que **la señal de salida es la primitiva de la señal de entrada**:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \qquad (26)$$

Gráficamente, el sistema integrador se implementa mediante **el bloque funcional que representa el cálculo de la integral de la señal**, tal y como se muestra en la Figura 10.

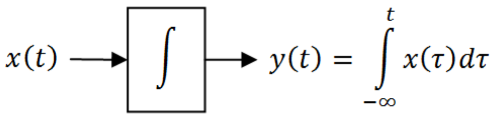

Figura 10. Bloque funcional integrador.

El sistema derivador es el inverso del integrador, y viceversa; o sea: lo que hace uno lo deshace el otro, y viceversa (más sobre esta cuestión en el apartado 4.6 de este mismo módulo).

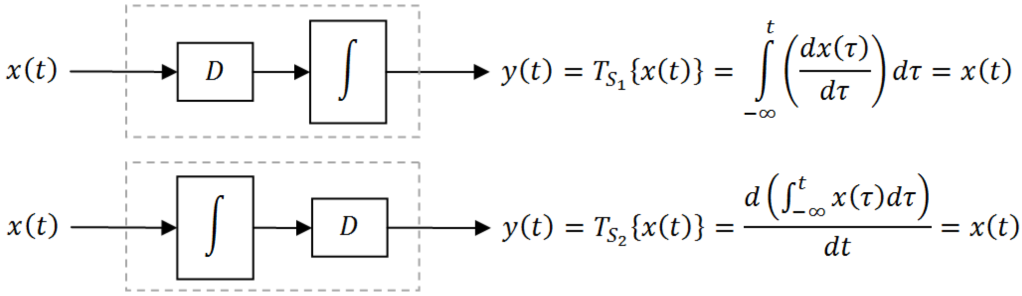

Figura 11. Los sistemas derivador e integrador anulan mutuamente sus efectos.

3.6. Sistema retardador

El **sistema retardador** es aquel sistema en que **la señal de salida es el resultado de aplicarle un retardo a la señal de entrada**:

$$y(t) = x(t - t_0) \tag{27}$$

$$y[n] = x[n - n_0] \tag{28}$$

siendo t_0 y n_0 valores constantes, con $t_0 \in \mathbb{R}$ y $n_0 \in \mathbb{Z}$.

Gráficamente, el sistema retardador se implementa mediante **el bloque funcional que representa el desplazamiento horizontal de la señal**, tal y como muestra la Figura 12.

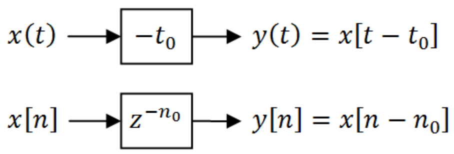

Figura 12. Bloque funcional retardador.

Si lo que se desea es implementar un **adelanto de la señal de entrada**, basta con indicar una constante positiva en el bloque y el sistema pasa a implementar un desplazamiento hacia el futuro de la salida respecto de la entrada, en lugar de hacerlo hacia el pasado.

En el caso del **retardador digital**, una de sus posibles aplicaciones es la de **aproximar la derivada y la integral** de la señal de entrada (operaciones restringidas a las señales analógicas) trabajando desde el dominio discreto. En general, si se asume que la señal digital de entrada del sistema es una versión muestreada de una señal analógica (como ya vimos en el apartado 1.3 del módulo anterior), cuanto más pequeño haya sido el valor del periodo de muestreo (T_m) mejores aproximaciones de la derivada y la integral podremos obtener en el dominio digital:

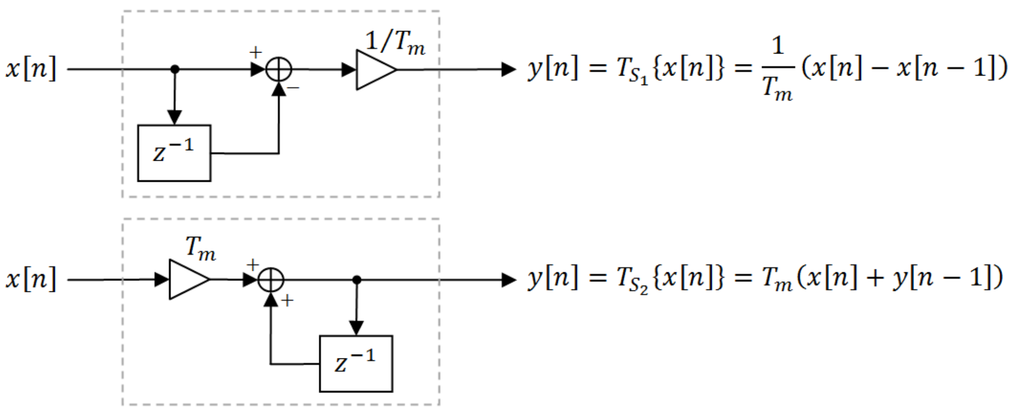

Figura 13. Aproximaciones de los sistemas derivador (S_1) e integrador (S_2) desde el dominio digital.

Es interesante observar que, en el «integrador discreto», la señal de salida es realimentada en el interior del propio sistema (más sobre sistemas realimentados en el apartado 3.8).

3.7. Sistemas diezmador y de inserción de ceros

El **sistema diezmador** es aquel **sistema digital** en que **la señal de salida es el resultado de diezmar en factor M la señal de entrada**:

$$y[n] = x[Mn] \qquad (29)$$

siendo M un valor constante tal que $M \in \mathbb{N}$ y $M > 1$.

El **sistema de inserción de ceros** es aquel **sistema digital** en que **la señal de salida es el resultado de insertar $L - 1$ ceros entre muestras consecutivas de la señal de entrada**:

$$y[n] = x\left[\frac{n}{L}\right] \qquad (30)$$

siendo L un valor constante tal que $L \in \mathbb{N}$ y $L > 1$.

En términos gráficos, ambos sistemas se implementan mediante sendos **bloques funcionales que representan el diezmo de la señal y la inserción de bloques de ceros entre muestras consecutivas de la señal**, tal y como se muestra en la Figura 14.

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\downarrow M} \longrightarrow y[n] = x[Mn]$$

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\uparrow L} \longrightarrow y[n] = x\left[\frac{n}{L}\right]$$

Figura 14. Bloques funcionales diezmador y de inserción de ceros.

Como ya vimos el apartado 4.3.2 del módulo anterior, si lo que se desea es **escalar la variable independiente discreta en un factor racional M/L**, basta con concatenar ambos bloques funcionales, sin que, de hecho, importe el orden:

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\downarrow M} \longrightarrow \boxed{\uparrow L} \longrightarrow y[n] = T_{S_1}\{x[n]\} = x\left[\frac{M}{L}n\right]$$

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\uparrow L} \longrightarrow \boxed{\downarrow M} \longrightarrow y[n] = T_{S_2}\{x[n]\} = x\left[\frac{M}{L}n\right]$$

Figura 15. Concatenación de los bloques diezmador y de inserción de ceros.

Asimismo, y análogamente a las operaciones de división y potencia entre señales, en general no acostumbra a trabajarse con bloques que representen el escalado de la variable independiente de señales analógicas, ni tampoco el cambio de signo (reflexión horizontal) de la variable independiente (ya sea en señales analógicas o digitales). Tales bloques funcionales siempre pueden ser definidos *ad hoc*, y, sobre todo, esto tampoco implica limitaciones: **es perfectamente válido trabajar con relaciones entrada-salida de sistemas que escalen la variable independiente continua o que cambien el signo de la variable independiente**.

3.8. Sistemas realimentados

Es muy habitual, en la implementación del diagrama de bloques de un sistema, encontrarse con **bucles (o lazos) de realimentación**, que, en general, no son más que líneas de flujo en el diagrama de bloques del sistema que permiten **trasladar la señal desde un punto A hasta otro punto B, donde el cálculo de la señal en el punto B depende de qué señal haya en el punto A**. Más típicamente, los bucles de realimentación suelen usarse para realimentar la señal de salida a algún punto intermedio del sistema. Y esto acostumbra a quedar reflejado en la relación entrada-salida de modo tal que, **habitualmente, el cálculo de la señal de salida en un sistema realimentado depende de ella misma**.

A modo de ejemplo, el «integrador discreto» ilustrado en la Figura 13 es una buena muestra de sistema realimentado, cuya relación de entrada-salida ilustra bien el hecho de que la salida del sistema esté directamente implicada en el proceso de cálculo de ella misma:

$$y[n] = T_m(x[n] - y[n-1]) \tag{31}$$

A este tipo de relaciones entrada-salida se las denomina **implícitas**, en el sentido de que **describen una relación entre la entrada y la salida del sistema**, frente a las relaciones entrada-salida denominadas **explícitas**, que **expresan la salida explícitamente en función de la entrada del sistema** (como sería cualquiera de las otras relaciones entrada-salida que hemos visto hasta ahora en este apartado). Una relación entrada-salida implícita es una ecuación que puede ser resuelta y, por tanto, transformada en una relación entrada-salida explícita equivalente, si bien para resolverla suele ser necesario contar con información acerca del comportamiento del sistema que no está incluida en su relación entrada-salida (a saber, el estado inicial del sistema en el momento de su puesta en marcha). Esta es una cuestión de gran interés, que será retomada más adelante, en módulos posteriores.

Por el momento, nos conformaremos con haberla introducido y con poder constatar que, en general, **todo sistema IIR será siempre un sistema realimentado**, puesto que es gracias a, al menos, un bucle de realimentación que la salida del sistema puede llegar a ser una señal infinita ante una entrada de longitud finita como, por ejemplo, una señal delta.

Para finalizar, a continuación se propone un ejercicio de obtención de la relación entrada-salida y cálculo de la respuesta impulsional en un sistema realimentado.

Ejemplo 2

Sea un sistema S cuyo diagrama de bloques es el siguiente:

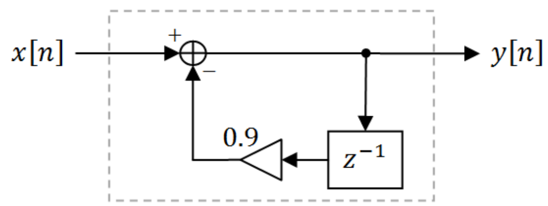

Figura 16. Diagrama de bloques del sistema S.

Se pide obtener la relación entrada-salida de S y calcular su respuesta impulsional.

Solución

En primer lugar, la presencia del bloque retardador de una muestra (además de la nomenclatura usada para denotar las señales de entrada y de salida) nos indica que S es un sistema digital.

Entonces, vemos que la señal en la salida del bloque retardador es $y[n-1]$ y que, por tanto, la señal en la salida del escalador es $0.9y[n-1]$. De este modo, ya obtenemos la relación entrada-salida del sistema S:

$$y[n] = T_S\{x[n]\} = x[n] - 0.9y[n-1] \tag{32}$$

Puesto que S es un sistema realimentado, se observa que la relación entrada-salida es implícita, es decir, no expresa la señal de salida del sistema explícitamente en función de la señal de entrada, sino que simplemente describe cómo están relacionadas ambas señales en el sistema.

Ahora, a fin de calcular la respuesta impulsional del sistema a partir de una relación entrada-salida no explícita, podemos proceder de forma iterativa y tratar de obtener una expresión generalizada de la misma. Empezaremos a iterar asumiendo que, puesto que $\delta[n] = 0$ para $n < 0$, también $h[n] = 0$ para $n < 0$:

$$h[n] = T_S\{x[n] = \delta[n]\} = \delta[n] - 0.9h[n-1]$$

$$\begin{aligned}
h[0] &= \delta[0] - 0.9h[-1] = 1 - 0.9 \cdot 0 = 1 \\
h[1] &= \delta[1] - 0.9h[0] = 0 - 0.9 \cdot 1 = -0.9 \\
h[2] &= \delta[2] - 0.9h[1] = 0 - 0.9(-0.9) = (0.9)^2 \\
h[3] &= \delta[3] - 0.9h[2] = 0 - 0.9(0.9)^2 = -(0.9)^3 \\
h[4] &= \delta[4] - 0.9h[3] = 0 - 0.9(-(0.9)^3) = (0.9)^4 \\
h[5] &= \delta[5] - 0.9h[4] = 0 - 0.9(0.9)^4 = -(0.9)^5 \\
h[6] &= \delta[6] - 0.9h[5] = 0 - 0.9(-(0.9)^5) = (0.9)^6 \\
&\vdots \\
h[i] &= (-0.9)^i
\end{aligned} \tag{33}$$

Así, se observa claramente la tendencia de que, a partir de $n = 0$, la muestra i-ésima de $h[n]$ es la potencia i-ésima de -0.9, de modo que estamos en condiciones de obtener una expresión general para $h[n]$:

$$h[n] = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad n < 0 \\ (-0.9)^n & \text{para} \quad n \geq 0 \end{cases} = (-0.9)^n u[n] \tag{34}$$

3.9. Asociación (o interconexión) de sistemas

Además de implementar sistemas interconectado bloques funcionales mediante líneas de flujo, también es muy típico en la práctica la **asociación de sistemas**, esto es, **la interconexión de sistemas mediante líneas de flujo y, si se requiere, más bloques funcionales a fin de construir sistemas más complejos**.

En general, los modos de asociación de sistemas más básicos y habituales son los siguientes:

- Asociación de sistemas **en serie**.
- Asociación de sistemas **en paralelo**.
- Asociación de sistemas **en lazo de realimentación**.
- Asociaciones de sistemas **híbridas**.

3.9.1. Asociación de sistemas en serie

La **asociación en serie** de sistemas es aquella en la que **los sistemas se interconectan secuencialmente, de modo tal que la entrada de cada sistema es excitada mediante la salida del sistema inmediatamente anterior en la secuencia de interconexión**, tal y como se ilustra en la Figura 17.

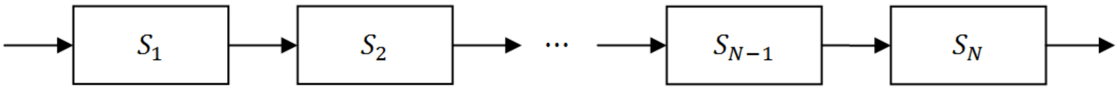

Figura 17. Asociación en serie de N sistemas.

La **relación entrada-salida del sistema global S resultante de la asociación de N sistemas en serie** se obtiene como sigue:

$$y(t) = T_S\{x(t)\} = T_{S_N}\left\{T_{S_{N-1}}\left\{\cdots T_{S_2}\left\{T_{S_1}\{x(t)\}\right\}\cdots\right\}\right\} \quad (35)$$

$$y[n] = T_S\{x[n]\} = T_{S_N}\left\{T_{S_{N-1}}\left\{\cdots T_{S_2}\left\{T_{S_1}\{x[n]\}\right\}\cdots\right\}\right\} \quad (36)$$

siendo $N \in \mathbb{N}$ y $N \geq 2$.

En general, se puede asumir que en la ecuación (35) los sistemas S_1,…, S_N son analógicos y, del mismo modo, se puede asumir también que en la ecuación (36) los sistemas S_1,…, S_N son digitales. Sin embargo, esto no tiene por qué ser necesariamente así. Lo único seguro es que, en (35), la entrada de S_1 y la salida de S_N son analógicas; y en (36), la entrada de S_1 y la salida de S_N son digitales.

En realidad, la única limitación que se da en las asociaciones en serie de sistemas es la siguiente: **la señal de entrada de cualquier sistema en una asociación en serie ha de ser del mismo tipo que la señal de salida del sistema que le precede en la interconexión**. Es esta condición, y solo esta condición, la que determina las posibilidades de interconexión serie entre sistemas analógicos, digitales e híbridos (analógico/digital y digital/analógico), sin que ello implique una pérdida de generalidad en las ecuaciones (35) y (36).

3.9.2. Asociación de sistemas en paralelo

La **asociación en paralelo** de sistemas es aquella en la que **los sistemas se interconectan de modo tal que todos comparten la misma señal de entrada y todas sus señales de salida se combinan en un bloque sumador a fin de obtener una única salida global**, tal y como se ilustra en la Figura 18.

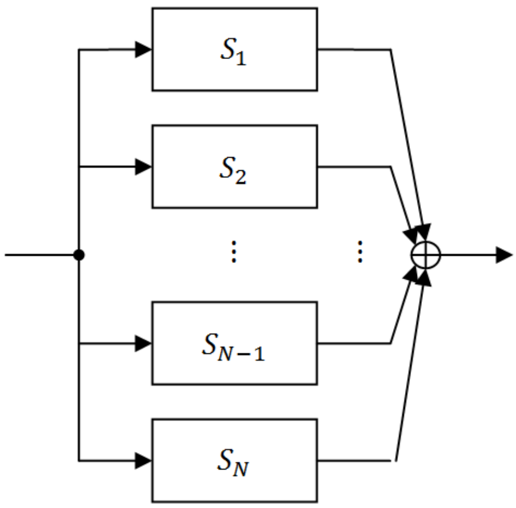

Figura 18. Asociación en paralelo de N sistemas.

La **relación entrada-salida del sistema global S resultante de la asociación de N sistemas en paralelo** se obtiene como sigue:

$$y(t) = T_S\{x(t)\} = T_{S_1}\{x(t)\} + \cdots + T_{S_N}\{x(t)\} \quad (37)$$

$$y[n] = T_S\{x[n]\} = T_{S_1}\{x[n]\} + \cdots + T_{S_N}\{x[n]\} \quad (38)$$

siendo $N \in \mathbb{N}$ y $N \geq 2$.

La limitación en este caso consiste en lo siguiente: **todos los sistemas en una asociación en paralelo han de ser del mismo tipo**, puesto que todos comparten la misma señal de entrada (analógica o digital) y todos han de generar una señal de salida del mismo tipo (analógica o digital).

Teniendo esto en cuenta, la ecuación (37) está definida de modo que tal los sistemas S_1,…, S_N son analógicos, y la ecuación (38) está definida de modo que tal los sistemas S_1,…, S_N son digitales, sin que ello implique una pérdida de generalidad.

3.9.3. Asociación de dos sistemas en lazo de realimentación

La **asociación en lazo de realimentación de dos sistemas** es aquella en la que **la salida del primero de ellos es la entrada del segundo, y la salida del segundo es añadida a la entrada del primero mediante un bloque sumador**, tal y como se ilustra en la Figura 19.

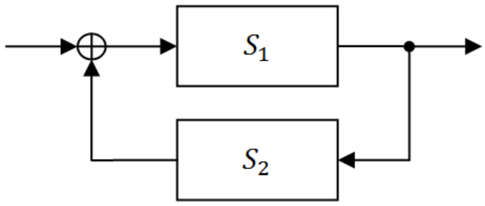

Figura 19. Asociación en lazo de realimentación de dos sistemas.

La **relación entrada-salida del sistema global S resultante de la asociación de dos sistemas en lazo de realimentación** se obtiene como sigue:

$$y(t) = T_S\{x(t)\} = T_{S_1}\left\{x(t) + T_{S_2}\{y(t)\}\right\} \quad (39)$$

$$y[n] = T_S\{x[n]\} = T_{S_1}\left\{x[n] + T_{S_2}\{y[n]\}\right\} \quad (40)$$

La limitación en este caso consiste en que, **en una asociación en lazo de realimentación, la señal de entrada del sistema S_1 ha de ser del mismo tipo que la señal de salida del sistema S_2, y viceversa**; es decir, o ambos sistemas son analógicos, o ambos son digitales, o son dos sistemas híbridos opuestos. Dicho lo cual, se puede asumir que en (39) ambos sistemas son analógicos, y que en (40) son digitales, sin que ello implique una pérdida de generalidad.

3.9.4. Asociaciones de sistemas híbridas

En general, los sistemas se pueden asociar en la práctica combinando arbitrariamente las formas de asociación básicas que acabamos de ver. En términos teóricos, las únicas limitaciones a la hora de combinar formas de asociación de sistemas son las propias de cada una de las formas de asociación que se utilicen, las cuales acaban de ser presentadas aquí.

Para finalizar, a continuación se propone un ejercicio de obtención de la relación entrada-salida y cálculo de la salida en un sistema resultante de la asociación de varios sistemas.

Ejemplo 3

Sean los cuatro sistemas analógicos siguientes:

$$y(t) = T_{S_1}\{x(t)\} = \frac{dx(t)}{dt} \quad (41)$$

$$y(t) = T_{S_2}\{x(t)\} = x(t-1) \tag{42}$$

$$y(t) = T_{S_3}\{x(t)\} = x(t+1) \tag{43}$$

$$y(t) = T_{S_4}\{x(t)\} = \frac{1}{2}x(t) \tag{44}$$

Sea el sistema global S resultante de la asociación de S_1, S_2, S_3 y S_4 indicada en la Figura 20:

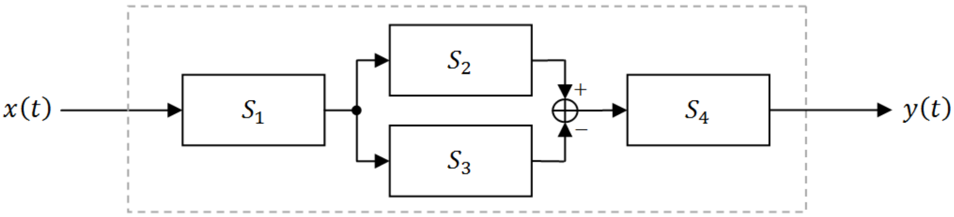

Figura 20. Sistema global S resultante de la asociación de los sistemas S_1, S_2, S_3 y S_4.

Se pide obtener la relación entrada-salida del sistema S, dibujar su diagrama de bloques y calcular su salida al ser excitado con una señal escalón unitario.

Solución

En primer lugar, puesto que los cuatro sistemas asociados son sistemas analógicos, ya sabemos que el sistema global S también será un sistema analógico.

Dicho lo cual, la relación entrada-salida del sistema S puede ser obtenida directamente a partir de su diagrama de bloques, recorriéndolo desde la salida y hacia la entrada, y aplicando en cada paso las relaciones entrada-salida de los sistemas S_1, S_2, S_3 y S_4 definidas en las ecuaciones (41)-(44):

$$y(t) = T_S\{x(t)\} = \frac{1}{2}\left(\frac{dx(t-1)}{d(t-1)} - \frac{dx(t+1)}{d(t+1)}\right) = \frac{1}{2}\frac{dx(t-1)}{dt} - \frac{1}{2}\frac{dx(t+1)}{dt} \tag{45}$$

Así, una vez conocida su relación entrada-salida, ahora ya podemos dibujar el diagrama de bloques del sistema global S:

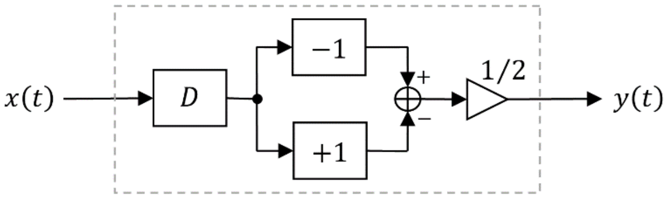

Figura 21. Diagrama de bloques del sistema S.

Y, finalmente, calculamos la salida del sistema S ante un escalón unitario:

$$y(t) = T_S\{x(t) = u(t)\} = \frac{1}{2}\frac{du(t-1)}{dt} - \frac{1}{2}\frac{du(t+1)}{dt} = \frac{1}{2}\delta(t-1) - \frac{1}{2}\,\delta(t+1) \tag{46}$$

4. Propiedades de los sistemas

En esta sección se presentan y estudian las propiedades básicas de los sistemas, tanto analógicos como digitales. Todas estas propiedades van ligadas a importantes interpretaciones físicas acerca de la naturaleza de los sistemas, gracias a las cuales es posible enlazar las formulaciones conceptuales y matemáticas desarrolladas en la teoría con los aspectos concretos propios de las implementaciones reales de los sistemas (ya sea en forma de circuitos electrónicos, sistemas físico-mecánicos, modelos predictivos, cálculos realizados por un procesador, etc.).

Asimismo, las propiedades que se describen a continuación son de gran relevancia para la teoría misma de señales y sistemas, puesto que los contenidos de todos los módulos posteriores estarán centrados en el estudio de aquellos sistemas que poseen dos de estas propiedades: la de linealidad y la de invariancia temporal. Además, también veremos que, en la práctica, siempre interesa trabajar con sistemas que sean causales y estables.

Por todas estas razones, es muy importante conocer y dominar con soltura las formulaciones y los matices de todas estas propiedades, a fin de poder determinar si cualquier sistema que se nos presente las posee o no.

4.1. Linealidad

La propiedad de **linealidad** es **la capacidad de un sistema de preservar en su salida toda posible combinación lineal de señales presente en su entrada**.

Así, **dada una combinación lineal arbitraria de cualesquiera M señales en la entrada de un sistema lineal S, su salida será la misma combinación lineal de las M respuestas del sistema a cada una de esas señales por separado**:

$$y(t) = T_S\{x(t)\} = T_S\left\{\sum_{i=1}^{M} a_i x_i(t)\right\} = \sum_{i=1}^{M} a_i T_S\{x_i(t)\} = \sum_{i=1}^{M} a_i y_i(t) \qquad (47)$$

$$y[n] = T_S\{x[n]\} = T_S\left\{\sum_{i=1}^{M} a_i x_i[n]\right\} = \sum_{i=1}^{M} a_i T_S\{x_i[n]\} = \sum_{i=1}^{M} a_i y_i[n] \qquad (48)$$

siendo $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 1$; siendo los pesos a_i valores constantes y, en general, complejos ($a_i \in \mathbb{C}, \forall i \in \{1, \dots, M\}$); siendo $y_i(t) = T_S\{x_i(t)\}$ e $y_i[n] = T_S\{x_i[n]\}$, $\forall i \in \{1, \dots, M\}$; y siendo S un sistema lineal analógico en (47) y un sistema lineal digital en (48).

Es muy importante comprender que si un sistema posee la propiedad de linealidad, su comportamiento se ajusta **siempre** a lo descrito en (47) y (48), **para toda combinación lineal de cualquier número de cualesquiera señales ponderadas con cualesquiera pesos que esté presente en su entrada**.

De este modo, un **sistema lineal** es aquel que posee la importante propiedad de la **superposición**: dada una entrada consistente en una superposición arbitraria de señales individuales, un sistema lineal procesa dicha entrada del mismo modo que si pudiera procesar una a una y por separado cada una de las señales individuales superpuestas y construir después la salida superponiendo de la misma forma las salidas individuales obtenidas.

A continuación, se propone un ejercicio de demostración de la propiedad de linealidad de diferentes sistemas.

Ejemplo 4

Sean los siguientes sistemas:

$$y(t) = T_{S_1}\{x(t)\} = p(t)\frac{dx(t)}{dt} \tag{49}$$

$$y(t) = T_{S_2}\{x(t)\} = x^2(t) \tag{50}$$

$$y[n] = T_{S_3}\{x[n]\} = 2x[n-1] + x[3n] \tag{51}$$

$$y[n] = T_{S_4}\{x[n]\} = x[n] + 1 \tag{52}$$

Se pide determinar cuáles de ellos son lineales y cuáles no lo son.

Solución

a) Para determinar si S_1 es o no lineal, en primer lugar, definimos **un conjunto arbitrario de M señales cualesquiera y las salidas de S_1 para cada una de ellas por separado**:

$$y_i(t) = T_{S_1}\{x_i(t)\} = p(t)\frac{dx_i(t)}{dt}, \forall i \in \{1, \dots, M\} \tag{53}$$

A continuación, definimos una señal de entrada para S_1 consistente en una **combinación lineal arbitraria** del conjunto de señales $x_i(t), \forall i \in \{1, \dots, M\}$:

$$x(t) = \sum_{i=1}^{M} a_i x_i(t) \tag{54}$$

siendo cada peso a_i un valor constante, con $a_i \in \mathbb{C}, \forall i \in \{1, \dots, M\}$.

Ahora, según (47), establecemos **cómo sería la salida de S_1 ante la combinación lineal arbitraria de señales definida en (54) si S_1 fuese lineal**:

$$y'(t) = \sum_{i=1}^{M} a_i y_i(t) = \sum_{i=1}^{M} a_i \left(p(t)\frac{dx_i(t)}{dt}\right) = p(t)\sum_{i=1}^{M} a_i \frac{dx_i(t)}{dt} \tag{55}$$

Para acabar, **calculamos cuál es realmente la salida de S_1 ante la combinación lineal arbitraria de señales definida en (54) y comprobamos si es igual o no al resultado obtenido en (55)**:

- **Si lo es, queda demostrado que S_1 es un sistema lineal**.
- **Si no lo es, queda demostrado que S_1 es un sistema no lineal**.

$$y(t) = T_{S_1}\{x(t)\} = p(t)\frac{dx(t)}{dt} = p(t)\frac{d(\sum_{i=1}^{M} a_i x_i(t))}{dt} = p(t)\sum_{i=1}^{M} a_i \frac{dx_i(t)}{dt} \qquad (56)$$

Se observa que $y(t) = y'(t)$, lo que nos permite concluir que **S_1 es un sistema lineal**.

b) Procederemos análogamente en el caso de S_2. Definimos primero un conjunto arbitrario de M señales cualesquiera y las salidas de S_2 para cada una de ellas por separado:

$$y_i(t) = T_{S_2}\{x_i(t)\} = x_i^2(t), \forall i \in \{1, \dots, M\} \qquad (57)$$

A continuación, definimos una señal de entrada para S_2 consistente en una combinación lineal arbitraria del conjunto de señales $x_i(t), \forall i \in \{1, \dots, M\}$:

$$x(t) = \sum_{i=1}^{M} a_i x_i(t) \qquad (58)$$

siendo cada peso a_i un valor constante, con $a_i \in \mathbb{C}, \forall i \in \{1, \dots, M\}$.

Ahora, según (47), establecemos cómo sería la salida de S_2 ante la combinación lineal arbitraria de señales definida en (58) si S_2 fuese lineal:

$$y'(t) = \sum_{i=1}^{M} a_i y_i(t) = \sum_{i=1}^{M} a_i x_i^2(t) \qquad (59)$$

Y, para acabar, calculamos cuál es realmente la salida de S_2 ante la combinación lineal arbitraria de señales definida en (58):

$$y(t) = T_{S_2}\{x(t)\} = x^2(t) = \left(\sum_{i=1}^{M} a_i x_i(t)\right)^2 \qquad (60)$$

Se observa que $y(t) \neq y'(t)$, puesto que:

$$\left.\begin{aligned} y(t) &= \left(\sum_{i=1}^{M} a_i x_i(t)\right)^2 = \big(a_1 x_1(t) + \cdots + a_M x_M(t)\big)^2 \\ y'(t) &= \sum_{i=1}^{M} a_i x_i^2(t) = a_1 x_1^2(t) + \cdots + a_M x_M^2(t) \end{aligned}\right\} \Rightarrow y(t) \neq y'(t) \qquad (61)$$

Por tanto, concluimos que **S_2 es un sistema no lineal**.

c) Puesto que la definición de linealidad es la misma tanto para sistemas analógicos como digitales, procederemos análogamente en el caso de S_3. Definimos primero un conjunto arbitrario de M señales cualesquiera y las salidas de S_3 para cada una de ellas por separado:

$$y_i[n] = T_{S_3}\{x_i[n]\} = 2x_i[n-1] + x_i[3n], \forall i \in \{1, \dots, M\} \qquad (62)$$

A continuación, definimos una señal de entrada para S_3 consistente en una combinación lineal arbitraria del conjunto de señales $x_i[n], \forall i \in \{1, \dots, M\}$:

$$x[n] = \sum_{i=1}^{M} a_i x_i[n] \tag{63}$$

siendo cada peso a_i un valor constante, con $a_i \in \mathbb{C}, \forall i \in \{1, \dots, M\}$.

Ahora, según (48), establecemos cómo sería la salida de S_3 ante la combinación lineal arbitraria de señales definida en (63) si S_3 fuese lineal:

$$y'[n] = \sum_{i=1}^{M} a_i y_i[n] = \sum_{i=1}^{M} a_i(2x_i[n-1] + x_i[3n]) = \\ 2\sum_{i=1}^{M} a_i x_i[n-1] + \sum_{i=1}^{M} a_i x_i[3n] \tag{64}$$

Y, para acabar, calculamos cuál es realmente la salida de S_3 ante la combinación lineal arbitraria de señales definida en (63):

$$y[n] = T_{S_3}\{x[n]\} = 2x[n-1] + x[3n] = 2\sum_{i=1}^{M} a_i x_i[n-1] + \sum_{i=1}^{M} a_i x_i[3n] \tag{65}$$

Se observa que $y(t) = y'(t)$, lo que nos permite concluir que $\boldsymbol{S_3}$ **es un sistema lineal**.

d) De nuevo, y ya para finalizar el ejercicio, procederemos análogamente en el caso de S_4. Definimos primero un conjunto arbitrario de M señales cualesquiera y las salidas de S_4 para cada una de ellas por separado:

$$y_i[n] = T_{S_4}\{x_i[n]\} = x_i[n] + 1, \forall i \in \{1, \dots, M\} \tag{66}$$

A continuación, definimos una señal de entrada para S_4 consistente en una combinación lineal arbitraria del conjunto de señales $x_i[n], \forall i \in \{1, \dots, M\}$:

$$x[n] = \sum_{i=1}^{M} a_i x_i[n] \tag{67}$$

siendo cada peso a_i un valor constante, con $a_i \in \mathbb{C}, \forall i \in \{1, \dots, M\}$.

Ahora, según (48), establecemos cómo sería la salida de S_4 ante la combinación lineal arbitraria de señales definida en (67) si S_4 fuese lineal:

$$y'[n] = \sum_{i=1}^{M} a_i y_i[n] = \sum_{i=1}^{M} a_i(x_i[n] + 1) = \sum_{i=1}^{M} a_i x_i[n] + \sum_{i=1}^{M} a_i \tag{68}$$

Y, para acabar, calculamos cuál es realmente la salida de S_4 ante la combinación lineal arbitraria de señales definida en (67):

$$y[n] = T_{S_4}\{x[n]\} = x[n] + 1 = \sum_{i=1}^{M} a_i x_i[n] + 1 \tag{69}$$

Se observa que $y(t) \neq y'(t)$, lo que nos permite concluir que $\boldsymbol{S_4}$ **es un sistema no lineal**.

La realización de este ejercicio nos permite observar que, en general, **la demostración de si un sistema es o no lineal implica siempre la aplicación sistemática de la definición de linealidad de (47) y (48) a la relación entrada-salida del sistema**.

Aun así, conviene notar que es posible intuir previamente si un sistema es o no lineal observando las operaciones que se dan en su relación entrada-salida, lo cual puede resultar de mucha ayuda a la hora de plantear la demostración. En este sentido, y de manera informal, se pueden considerar los siguientes síntomas:

- Sumar (o restar) señales independientes de la entrada y la salida a señales que sí dependen de la entrada o de la salida **sugiere no linealidad**.
- Sumar (o restar) señales que sí dependen de la entrada o de la salida a señales que también dependen de la entrada o de la salida **no compromete la linealidad**.
- Multiplicar (o dividir) señales que sí dependen de la entrada o de la salida por señales que también dependen de la entrada o de la salida **sugiere no linealidad**.
- Multiplicar (o dividir) señales que sí dependen de la entrada o de la salida por señales independientes de la entrada y la salida **no compromete la linealidad**.
- El cálculo de cualquier potencia que implique a señales que sí dependen de la entrada o de la salida **sugiere no linealidad**.
- Calcular la derivada o la integral de señales que dependen de la entrada o de la salida **no compromete la linealidad**.
- Las transformaciones de la variable independiente, en general, **no comprometen la linealidad**.

4.2. Invariancia temporal

La propiedad de **invariancia temporal** es **la capacidad de un sistema de preservar en su salida cualquier desplazamiento horizontal al que pueda verse sometida su entrada**.

Así, **dada una señal cualquiera, la salida de un sistema invariante en el tiempo S ante un desplazamiento horizontal arbitrario de dicha señal será la misma que ante la señal sin desplazar sometida a ese mismo desplazamiento horizontal arbitrario**:

$$T_S\{x(t)\} = y(t) \iff T_S\{x(t \pm t_0)\} = y(t \pm t_0), \forall t_0 \in \mathbb{R} \quad (70)$$

$$T_S\{x[n]\} = y[n] \iff T_S\{x[n \pm n_0]\} = y[n \pm n_0], \forall n_0 \in \mathbb{Z} \quad (71)$$

siendo t_0 y n_0 valores constantes, y siendo S un sistema invariante en el tiempo analógico en (70) y un sistema invariante en el tiempo digital en (71).

Es muy importante comprender que, si un sistema posee la propiedad de invariancia temporal, su comportamiento se ajusta **siempre** a lo descrito en (70) y (71), **para cualquier señal sometida a cualquier desplazamiento horizontal que esté presente en su entrada**.

De este modo, lo que caracteriza a un **sistema invariante en el tiempo** es que **siempre se comporta del mismo modo**, es decir, que **su comportamiento no varía con el tiempo**: un sistema invariante en el tiempo está haciendo siempre lo mismo, independientemente del instante de tiempo en que sea observado.

A continuación, se propone un ejercicio de demostración de la propiedad de invariancia temporal de diferentes sistemas.

Ejemplo 5

Sean los siguientes sistemas:

$$y(t) = T_{S_1}\{x(t)\} = p(t)x(t) \tag{72}$$

$$y(t) = T_{S_2}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{t} x^2(\tau)d\tau \tag{73}$$

$$y[n] = T_{S_3}\{x[n]\} = x[3n] \tag{74}$$

$$y[n] = T_{S_4}\{x[n]\} = 2x[n-1] + 1 \tag{75}$$

Se pide determinar cuáles de ellos son invariantes en el tiempo y cuáles no lo son.

Solución

a) Para determinar si S_1 es o no invariante en el tiempo, en primer lugar, definimos **la salida de S_1 ante una señal de entrada cualquiera**: denominando $x(t)$ a dicha señal, dicha definición ya es justamente la relación entrada-salida de S_1 expresada en (72).

Ahora, según (70), establecemos **cómo sería la salida de S_1 ante un desplazamiento horizontal arbitrario de dicha señal de entrada si S_1 fuese invariante en el tiempo**:

$$y(t-t_0) = p(t-t_0)x(t-t_0) \tag{76}$$

allí donde t_0 es un valor constante arbitrario, siendo $t_0 \in \mathbb{R}$.

Para acabar, **calculamos cuál es realmente la salida de S_1 ante ese desplazamiento horizontal arbitrario de la señal de entrada y comprobamos si es igual o no al resultado obtenido en (76)**:

- **Si lo es, queda demostrado que S_1 es un sistema invariante en el tiempo**.
- **Si no lo es, queda demostrado que S_1 es un sistema variante en el tiempo**.

$$T_{S_1}\{x(t-t_0)\} = p(t)x(t-t_0) \tag{77}$$

Se observa que $T_{S_1}\{x(t-t_0)\} \neq y(t-t_0)$, con lo que **$S_1$ es un sistema variante en el tiempo**.

b) Análogamente, la salida de S_2 ante una señal de entrada cualquiera no es más que su relación entrada-salida, ya definida en (73). Ahora, según (70), establecemos cómo sería la salida de S_2 ante un desplazamiento horizontal arbitrario de dicha señal de entrada si S_2 fuese invariante en el tiempo:

$$y(t-t_0)=\int_{-\infty}^{t-t_0} x^2(\tau)d\tau \qquad (78)$$

allí donde t_0 es un valor constante arbitrario, siendo $t_0 \in \mathbb{R}$.

Para acabar, calculamos cuál es realmente la salida de S_2 ante ese desplazamiento horizontal arbitrario de la señal de entrada y comprobamos si es igual o no al resultado obtenido en (78):

$$T_{S_2}\{x(t-t_0)\}=\int_{-\infty}^{t} x^2(\tau-t_0)d\tau=\left\{\begin{matrix} (\sigma=\tau-t_0) \\ \tau=\sigma+t_0 \\ d\tau=d(\sigma+t_0)=d\sigma \\ \tau=t \ \Rightarrow\ \sigma=t-t_0 \\ \tau\to-\infty \ \Rightarrow\ \sigma\to-\infty \end{matrix}\right\}=\int_{-\infty}^{t-t_0} x^2(\sigma)d\sigma \qquad (79)$$

Se observa que $T_{S_2}\{x(t-t_0)\}=y(t-t_0)$, puesto que la variable de integración (τ o σ) no supone ninguna diferencia. Por tanto, concluimos que $\boldsymbol{S_2}$ **es un sistema invariante en el tiempo**.

c) Análogamente, la salida de S_3 ante una señal de entrada cualquiera no es más que su relación entrada-salida, ya definida en (74). Ahora, según (71), establecemos cómo sería la salida de S_3 ante un desplazamiento horizontal arbitrario de dicha señal de entrada si S_3 fuese invariante en el tiempo:

$$y[n-n_0]=x[3(n-n_0)]=x[3n-3n_0] \qquad (80)$$

allí donde n_0 es un valor constante arbitrario, siendo $n_0 \in \mathbb{Z}$.

Para acabar, calculamos cuál es realmente la salida de S_3 ante ese desplazamiento horizontal arbitrario de la señal de entrada y comprobamos si es igual o no al resultado obtenido en (80):

$$T_{S_3}\{x[n-n_0]\}=x[3n-n_0] \qquad (81)$$

Se observa que $T_{S_3}\{x[n-n_0]\}\neq y[n-n_0]$; por tanto, $\boldsymbol{S_3}$ **es un sistema variante en el tiempo**.

d) Análogamente, la salida de S_4 ante una señal de entrada cualquiera no es más que su relación entrada-salida, ya definida en (75). Ahora, según (71), establecemos cómo sería la salida de S_4 ante un desplazamiento horizontal arbitrario de dicha señal de entrada si S_4 fuese invariante en el tiempo:

$$y[n-n_0]=2x[n-n_0-1]+1 \qquad (82)$$

allí donde n_0 es un valor constante arbitrario, siendo $n_0 \in \mathbb{Z}$.

Para acabar, calculamos cuál es realmente la salida de S_4 ante ese desplazamiento horizontal arbitrario de la señal de entrada y comprobamos si es igual o no al resultado obtenido en (82):

$$T_{S_3}\{x[n-n_0]\}=2x[n-n_0-1]+1 \qquad (83)$$

Puesto que $T_{S_4}\{x[n-n_0]\}=y[n-n_0]$, vemos que $\boldsymbol{S_4}$ **es un sistema invariante en el tiempo**.

La realización de este ejercicio nos permite observar que, en general, **la demostración de si un sistema es o no invariante en el tiempo implica siempre la aplicación sistemática de la definición de invariancia temporal de (70) y (71) a la relación entrada-salida del sistema**.

Aun así, conviene notar que, de nuevo, es posible intuir previamente si un sistema es o no invariante en el tiempo observando las operaciones que se dan en su relación entrada-salida. En este sentido, y de manera informal, se pueden considerar los siguientes síntomas:

- La presencia de señales no constantes independientes de la entrada y la salida **sugiere variancia temporal**.
- La presencia de constantes **no compromete la invariancia temporal**.
- Tanto la expansión/compresión como la reflexión horizontal de señales que dependen de la entrada o la salida (es decir, tanto el escalado como el cambio de signo de su variable independiente) **sugieren variancia temporal**.
- El desplazamiento horizontal de señales que dependen de la entrada o la salida (es decir, sumar/restar constantes a su variable independiente) **no compromete la invariancia temporal**.
- Calcular la derivada o la integral de señales que dependen de la entrada o de la salida **no compromete la invariancia temporal**.

4.3. Causalidad

La propiedad de **causalidad** es **la capacidad de un sistema de calcular su salida usando exclusivamente información presente y/o pasada de su entrada**. De este modo:

- Un sistema es **causal** si y solo si **el valor de la salida en cualquier instante de tiempo no depende de valores de la entrada en instantes posteriores a ese**.
- Un sistema es **no causal** si y solo si **el valor de la salida en algún instante de tiempo depende del valor de la entrada en algún instante posterior a ese**.
- Un sistema es **anticausal** si y solo si **el valor de la salida en cualquier instante de tiempo depende solo de valores de la entrada en instantes posteriores a ese**.

Nótese que, para que un sistema sea causal, bajo ninguna circunstancia (o sea, en ningún momento y ante ninguna señal de entrada) ha de usar información futura para calcular su salida. Y, del mismo modo, para que un sistema sea anticausal, bajo ninguna circunstancia (o sea, en ningún momento y ante ninguna señal de entrada) ha de usar información presente o pasada para calcular su salida. Claramente, todo sistema anticausal es no causal, pero no todo sistema no causal es anticausal, puesto que, para que un sistema sea no causal, basta con que en una única circunstancia (o sea, en algún momento o ante alguna señal de entrada) use información futura para calcular su salida.

La propiedad de causalidad es de gran importancia, puesto que determina si un sistema puede ser implementado en la práctica o no: **siempre que la variable independiente sea el tiempo, solo los sistemas causales pueden ser realmente implementados en la práctica**. Obviamente, esto se debe a que, en el universo físico, las causas siempre preceden a los efectos, de modo que es imposible que se den efectos causados por fenómenos que aún no han acontecido. En el mejor de los casos, sí es posible implementar sistemas no causales para que trabajen *offline*, esto es, en diferido, pero nunca a tiempo real: es posible simular el comportamiento de un sistema no causal, calculando en diferido la señal de salida que dicho sistema genera ante una entrada, esperando a tener acumulada en algún tipo de memoria la cantidad suficiente de valores de amplitud de dicha entrada para poder realizar el cálculo (tal cantidad, huelga decirlo, tendrá que ser finita).

A continuación, se propone un ejercicio de demostración de la propiedad de causalidad de diferentes sistemas.

Ejemplo 6

Sean los siguientes sistemas:

$$y(t) = T_{S_1}\{x(t)\} = x(-t) \tag{84}$$

$$y(t) = T_{S_2}\{x(t)\} = x(t+1) \tag{85}$$

$$y[n] = T_{S_3}\{x[n]\} = x\left[\frac{3n}{2}\right] \tag{86}$$

$$y[n] = T_{S_4}\{x[n]\} = x[n] - 0.9y[n-1] \tag{87}$$

Se pide determinar cuáles de ellos son causales y cuáles no lo son.

Solución

a) Determinar que un sistema es no causal requiere hallar, al menos, un instante de tiempo en la salida dependa de valores de la entrada posteriores a ese instante. En un sistema analógico, hay que hallar algún instante t_1 tal que $y(t_1)$ dependa de, al menos, $x(t_2)$, siendo $t_2 > t_1$.

En el caso de S_1, eso es bien sencillo, pues basta con tomar cualquier valor negativo de t:

$$y(-1) = T_{S_1}\{x(-1)\} = x(1) \tag{88}$$

Esto ya demuestra que $\boldsymbol{S_1}$ **es un sistema no causal**, puesto que calcular su salida en $t = -1$ requiere conocer cuánto valdrá su entrada dos segundos después, en $t = 1$.

Por otra parte, S_1 no es anticausal, puesto que, para calcular su salida en cualquier valor no negativo de t, echa mano de valores presentes o pasados de la entrada; por ejemplo:

$$y(0) = T_{S_1}\{x(0)\} = x(0) \tag{89}$$

$$y(1) = T_{S_1}\{x(1)\} = x(-1) \tag{90}$$

b) Procediendo de forma análoga al apartado anterior, se observa claramente que $\boldsymbol{S_2}$ **es un sistema anticausal**, puesto que, para cualquier instante de tiempo que consideremos, su salida depende exclusivamente de valores futuros de su entrada:

$$y(t_0) = T_{S_2}\{x(t_0)\} = x(t_0+1), \forall t_0 \in \mathbb{R} \tag{91}$$

c) En el caso de un sistema digital, para determinar que es no causal, hay que hallar alguna muestra n_1 tal que $y(n_1)$ dependa de, al menos, $x(n_2)$, siendo $n_2 > n_1$. Vemos que, en el caso de S_3, esto se logra fácilmente escogiendo cualquier valor par positivo de n:

$$y[2] = T_{S_3}\{x(2)\} = x[3] \tag{92}$$

Esto ya demuestra que $\boldsymbol{S_3}$ **es un sistema no causal**. Y, de nuevo, S_3 no es anticausal, puesto que, para calcular su salida en cualquier valor par no positivo de n, echa mano de valores presentes o pasados de la entrada; por ejemplo:

$$y[0] = T_{S_1}\{x[0]\} = x[0] \tag{93}$$

$$y[-2] = T_{S_1}\{x[-2]\} = x[-3] \tag{94}$$

d) Finalmente, se observa que en la relación entrada-salida de S_4 únicamente están implicados $x[n]$ (es decir, el valor actual de la señal de entrada) e $y[n-1]$ (es decir, la señal de salida del sistema atrasada una muestra). Esto ya es suficiente para demostrar que $\boldsymbol{S_4}$ **es un sistema causal**, pues en el cálculo de $y[n]$ solo maneja información presente y pasada, y en ningún caso futura, tanto de la entrada como de la salida.

Por su parte, el término $0.9y[n-1]$ indica que S_4 es un sistema realimentado, pero en ese lazo de realimentación se va acumulando el pasado, y nunca el futuro, de la señal de entrada, puesto que, en general, para cualquier valor arbitrario $n = n_0$:

$$\begin{aligned}
y[n_0] &= x[n_0] - 0.9y[n_0 - 1] \\
y[n_0 - 1] &= x[n_0 - 1] - 0.9y[n_0 - 2] \\
y[n_0 - 2] &= x[n_0 - 2] - 0.9y[n_0 - 3] \\
y[n_0 - 3] &= x[n_0 - 3] - 0.9y[n_0 - 4] \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{95}$$

La realización de este ejercicio nos permite observar que, en general, **la demostración de si un sistema es o no causal implica evaluar su relación entrada-salida en busca de elementos que, en al menos algún instante de tiempo, supongan el uso de valores de la señal de entrada posteriores a dicho instante**. Como siempre, es posible intuir si un sistema es o no causal simplemente observando las operaciones que se implementan en su relación entrada-salida. En este sentido, y de manera puramente informal, se pueden considerar los siguientes síntomas:

- Exceptuando la resta de una constante positiva, las transformaciones de la variable independiente en señales que dependen de la entrada o la salida **sugieren no causalidad**.
- Cualquier otra operación, tanto si afecta a las señales de entrada y de salida como si no, **no compromete la causalidad**.

4.4. Estabilidad

La propiedad de **estabilidad** es **la capacidad de un sistema de garantizar que su salida estará acotada en amplitud siempre que también lo esté su entrada**.

Así, **la salida de un sistema estable S ante cualquier señal acotada en amplitud será también una señal acotada en amplitud**:

$$|x(t)| \leq A \implies |y(t)| \leq B \tag{96}$$

$$|x[n]| \leq A \implies |y[n]| \leq B \tag{97}$$

siendo A y B valores finitos, con $A, B \in \mathbb{R}$, y siendo S un sistema estable analógico tal que $y(t) = T_S\{x(t)\}$ en (96) y un sistema estable digital tal que $y[n] = T_S\{x[n]\}$ en (97).

Es muy importante comprender que, si un sistema posee la propiedad de estabilidad, su comportamiento se ajusta **siempre** a lo descrito en (96) y (97), **para cualquier señal acotada a cualquier nivel de amplitud que esté presente en su entrada**.

La estabilidad de un sistema es algo muy deseable en la práctica, pues garantiza que la salida no va a divergir en amplitud, evitando así que pueda llegar a aumentar indiscriminadamente hasta dañar otros sistemas cuyas entradas puedan depender de la salida de este (por someterlos a señales de potencias muy elevadas), o a que, por ejemplo, en el caso de sistemas digitales implementados en procesadores tipo DSP (del inglés, *Digital Signal Processor*) o FPGA (del inglés, *Field Programmable Gate Array*), la precisión numérica no baste para representar los niveles de amplitud de las señales. En general, y muy especialmente en aplicaciones que trabajen a tiempo real, es muy habitual buscar que los sistemas implicados sean siempre **causales y estables**.

A continuación, se propone un ejercicio de demostración de la propiedad de estabilidad.

Ejemplo 7

Sean los siguientes sistemas:

$$y(t) = T_{S_1}\{x(t)\} = x^2(t) \tag{98}$$

$$y(t) = T_{S_2}\{x(t)\} = x(t) - 2y(t-1) \tag{99}$$

$$y[n] = T_{S_3}\{x[n]\} = \frac{1}{n}x[n] \tag{100}$$

$$y[n] = T_{S_4}\{x[n]\} = x[n] - 0.9y[n-1] \tag{101}$$

Se pide determinar cuáles de ellos son estables y cuáles no lo son.

Solución

a) Para ver si S_1 es o no estable, **aplicamos directamente la definición de estabilidad** de (96):

$$
\begin{aligned}
&|x(t)| \le A \implies |x(t)|^2 = |x(t)||x(t)| \le A \cdot A = A^2 \\
&y(t) = T_{S_1}\{x(t)\} = x^2(t) \implies |y(t)| = |x^2(t)| = |x(t)x(t)| = |x(t)||x(t)| \le A^2
\end{aligned} \tag{102}
$$

Por tanto, $\boldsymbol{S_1}$ **es un sistema estable**, puesto que, ante cualquier señal de entrada acotada en amplitud por una cota arbitraria A, su salida está acotada en amplitud por una cota A^2.

b) En el caso de S_2, vemos que se trata de un sistema realimentado. **La presencia de lazos de realimentación es un factor crucial a la hora de determinar la estabilidad de un sistema**. Iterando la relación entrada-salida de S_2, se observa una acumulación de términos que dependen de la señal de entrada multiplicados por factores cada vez mayores:

$$y(t) = T_{S_2}\{x(t)\} = x(t) - 2y(t-1)$$

$$
\begin{aligned}
&y(t) = x(t) - 2y(t-1) \\
&y(t-1) = x(t-1) - 2y(t-2) \implies y(t) = x(t) - 2x(t-1) + 4y(t-2) \\
&y(t-2) = x(t-2) - 2y(t-3) \implies \\
&\qquad\qquad y(t) = x(t) - 2x(t-1) + 4x(t-2) - 8y(t-3) \\
&y(t-3) = x(t-3) - 2y(t-4) \implies \\
&\qquad\qquad y(t) = x(t) - 2x(t-1) + 4x(t-2) - 8x(t-3) + 16y(t-4) \\
&\qquad\qquad \vdots
\end{aligned} \tag{103}
$$

Siguiendo la tendencia observada en (103), se observa que el lazo de realimentación provoca que, en el cálculo de $y(t)$, la acumulación de sucesivas versiones retardadas de la señal de entrada, estando cada una de ellas ponderada por un factor cada vez mayor:

$$y(t) = T_{S_2}\{x(t)\} = \sum_{l=1}^{\infty} (-2)^l x(t-l) \tag{104}$$

En este caso, y precisamente debido a que los factores de ponderación van creciendo, se observa que $\boldsymbol{S_2}$ **es un sistema inestable**, puesto que, aun estando $x(t)$ acotada en amplitud, la amplitud de su salida crece indiscriminadamente y, por tanto, no está acotada:

$$
\begin{aligned}
&|x(t)| \le A \implies \left| \lim_{N\to\infty} \sum_{l=1}^{N} (-2)^l x(t-l) \right| \le \lim_{N\to\infty} \sum_{i=l}^{N} |(-2)^l x(t-l)| = \\
&\lim_{N\to\infty} \sum_{l=1}^{N} |(-2)^l|\,|x(t-l)| = A \lim_{N\to\infty} \sum_{l=1}^{N} |-2|^l = A \lim_{N\to\infty} \sum_{l=1}^{N} 2^l = A \lim_{N\to\infty} \frac{2-2^{N+1}}{1-2} = \\
&A \lim_{N\to\infty} (2^{N+1}-2) = \infty \implies |x(t)| \le A \not\Rightarrow |y(t)| \le B
\end{aligned} \tag{105}
$$

c) En el caso de S_3, se observa en su relación entrada-salida que su salida presenta un valor problemático para $n = 0$:

$$y[0] = T_{S_3}\{x[0]\} = \frac{1}{0} x[0] \to \infty \quad \implies \quad |x(t)| \le A \not\Rightarrow |y(t)| \le B \tag{106}$$

Por tanto, $\boldsymbol{S_3}$ **es un sistema inestable**, puesto que una señal de entrada acotada en amplitud no garantiza que su salida también lo esté.

d) En el caso de S_4, vemos que también se trata de un sistema realimentado. Sin embargo, al iterar su relación entrada-salida, se observa que, en la acumulación de términos dependientes de la señal de entrada, estos están multiplicados por factores cada vez menores:

$$y[n] = T_{S_4}\{x[n]\} = x[n] - 0.9y[n-1]$$

$$\begin{aligned}
&y[n] = x[n] - 0.9y[n-1] \\
&y[n-1] = x[n-1] - 0.9y[n-2] \Rightarrow \\
&\qquad y[n] = x[n] - 0.9x[n-1] + (0.9)^2 y[n-2] \\
&y[n-2] = x[n-2] - 0.9y[n-3] \Rightarrow \\
&\qquad y[n] = x[n] - 0.9x[n-1] + (0.9)^2 x[n-2] - (0.9)^3 y[n-3] \\
&y[n-3] = x[n-3] - 0.9y[n-4] \Rightarrow \\
&\qquad y[n] = x[n] - 0.9x[n-1] + (0.9)^2 x[n-2] - (0.9)^3 x[n-3] + (0.9)^4 y[n-4] \\
&\qquad \vdots
\end{aligned} \tag{107}$$

Siguiendo la tendencia observada en (107):

$$y[n] = T_{S_4}\{x[n]\} = \sum_{m=1}^{\infty} (-0.9)^m x[n-m] \tag{108}$$

En este caso, y precisamente debido a que los factores de ponderación van tendiendo a 0, se observa que $\boldsymbol{S_4}$ **es un sistema estable**, puesto que, estando $x[n]$ acotada en amplitud, la amplitud de $y[n]$ también queda acotada:

$$\begin{aligned}
&|x(t)| \le A \Rightarrow \left|\lim_{N\to\infty} \sum_{m=1}^{N} (-0.9)^m x[n-m]\right| \le \lim_{N\to\infty} \sum_{i=l}^{N} |(-0.9)^m x[n-m]| = \\
&\lim_{N\to\infty} \sum_{m=1}^{N} |(-0.9)^m|\,|x[n-m]| = A \lim_{N\to\infty} \sum_{m=1}^{N} (0.9)^m = A \lim_{N\to\infty} \frac{0.9 - (0.9)^{N+1}}{1-0.9} = \\
&10A \lim_{N\to\infty} (0.9 - (0.9)^{N+1}) = 9A \Rightarrow |x(t)| \le A \Rightarrow |y(t)| \le 9A
\end{aligned} \tag{109}$$

La realización de este ejercicio nos permite observar que, en general, **la demostración de si un sistema es o no estable acostumbra a implicar la búsqueda de lazos de realimentación en la relación entrada-salida del sistema**:

- En general, la ausencia de lazos de realimentación **sugiere estabilidad**. Aun así, puede darse el caso, como hemos visto, que el sistema incluya constantes o señales internas cuya amplitud sea infinita (cosa imposible en un sistema que realmente pueda implementarse en la práctica) o igual a cero (dividiendo, por ejemplo, a la señal de entrada), lo cual **sugiere inestabilidad**.
- En presencia de lazos de realimentación, puede darse el caso que la señal realimentada sea multiplicada por alguna constante o por alguna otra señal. En general, que el módulo de tal constante, o señal, sea menor que la unidad **sugiere estabilidad**; y que el módulo de tal constante, o señal, sea mayor o igual que la unidad **sugiere inestabilidad**.

4.5. Memoria de un sistema

La **memoria** es **la capacidad de un sistema de usar información pasada de su entrada para calcular su salida**. De este modo:

- Un sistema tiene una **memoria de T segundos, o N muestras**, si y solo si **el valor de la salida en algún instante de tiempo llega a depender del valor de la entrada T segundos, o N muestras, antes de dicho instante**.
- Un sistema es **instantáneo** si y solo si **el valor de la salida en cualquier instante de tiempo depende solo del valor de la entrada en ese mismo instante**.
- Un sistema **no tiene memoria** si y solo si **el valor de la salida en cualquier instante de tiempo nunca depende del valor de la entrada en algún instante anterior**.

Nótese que, para que un sistema tenga memoria, basta con que en una única circunstancia (o sea, en algún momento o ante alguna señal de entrada) use información pasada para calcular su salida. Sin embargo, para que un sistema sea instantáneo, bajo ninguna circunstancia (o sea, en ningún momento y ante ninguna señal de entrada) ha de usar información que no sea estrictamente presente para calcular su salida.

A continuación, se propone un ejercicio de cálculo de la cantidad de memoria de diferentes sistemas.

Ejemplo 8

Sean los siguientes sistemas:

$$y(t) = T_{S_1}\{x(t)\} = x(-t) \tag{110}$$

$$y(t) = T_{S_2}\{x(t)\} = x\left(t - \frac{1}{2}\right) \tag{111}$$

$$y[n] = T_{S_3}\{x[n]\} = x^2[n] + \frac{3}{2} \tag{112}$$

$$y[n] = T_{S_4}\{x[n]\} = x[n] - \frac{9}{10}y[n-1] \tag{113}$$

Se pide calcular la memoria de cada uno de ellos.

Solución

a) En el caso de S_1, se observa que, en valores positivos de t, el sistema recurre a información pasada de la entrada para calcular la salida; por ejemplo, para $t = 10$:

$$y(10) = T_{S_1}\{x(10)\} = x(-10) \tag{114}$$

En general, si nos remontamos a $t \to +\infty$, vemos que el sistema recurre al valor de la entrada para $t \to -\infty$:

$$y(t \to +\infty) = T_{S_1}\{x(t \to +\infty)\} = x(-t \to +\infty) = x(t \to -\infty) \tag{115}$$

Esto nos indica que $\boldsymbol{S_1}$ **es un sistema de memoria infinita**, pues es capaz de recordar cualquier valor pasado de la señal de entrada.

b) En este caso, se observa que $\boldsymbol{S_2}$ **tiene una memoria de medio segundo**, pues, para cualquier instante de tiempo y ante cualquier señal de entrada, el valor de su salida es siempre igual al valor de su entrada $1/2$ segundo antes:

$$y(t_0) = T_{S_2}\{x(t_0)\} = x\left(t_0 - \frac{1}{2}\right), \forall t_0 \in \mathbb{R} \tag{116}$$

c) En este caso, se observa que $\boldsymbol{S_3}$ **es un sistema instantáneo**, pues, para cualquier instante de tiempo y ante cualquier señal de entrada, el valor de su salida es siempre igual a $3/2$ más el valor de su entrada en ese mismo instante, sin utilizar nunca información pasada ni futura de su entrada, sino solo información actual:

$$y[n_0] = T_{S_2}\{x[n_0]\} = x^2[n_0] + \frac{3}{2}, \forall n_0 \in \mathbb{Z} \tag{117}$$

d) Finalmente, se observa que el sistema S_4 definido en (113) es el mismo sistema S_4 definido en (101), en el Ejemplo 7.

Por tanto, podemos recurrir a la ecuación (108), en ese mismo ejercicio, para observar que $\boldsymbol{S_4}$ **es un sistema de memoria infinita**, puesto que, gracias al lazo de realimentación, va acumulando toda la información pasada de la señal de entrada para calcular su salida:

$$\begin{gathered} y[n] = \sum_{m=1}^{\infty} (-0.9)^m x[n-m] = \\ x[n] - 0.9x[n-1] + (0.9)^2 x[n-2] - (0.9)^3 x[n-3] + (0.9)^4 x[n-4] \cdots \end{gathered} \tag{118}$$

La realización de este ejercicio nos permite observar que, en general, **el cálculo de la memoria de un sistema implica evaluar su relación entrada-salida en busca de elementos que, en al menos algún instante de tiempo, supongan el uso de valores de la señal de entrada anteriores a dicho instante**.

Como siempre, es posible intuir la cantidad de memoria de un sistema simplemente observando las operaciones que se implementan en su relación entrada-salida. En este sentido, y de manera puramente informal, se pueden tener en consideración los siguientes síntomas:

- La presencia de lazos de realimentación en algún punto del sistema **sugiere memoria infinita**.
- Las transformaciones de la variable independiente en señales que dependen de la señal de entrada del sistema son **indicadores de la memoria del sistema**.

4.6. Invertibilidad

La propiedad de **invertibilidad** es **la capacidad de un sistema de ser anulado por otro sistema**.

Así, **un sistema S_1 es invertible si y solo si existe otro sistema S_2 tal que, ante cualquier señal presente en la entrada de S_1, la asociación serie que conecta la salida de S_1 a la entrada de S_2 genera en la salida de S_2 una señal igual a la entrada de S_1**:

$$T_{S_2}\left\{T_{S_1}\{x(t)\}\right\} = x(t), \forall x(t) \tag{119}$$

$$T_{S_2}\left\{T_{S_1}\{x[n]\}\right\} = x[n], \forall x[n] \tag{120}$$

allí donde **S_2 es el sistema inverso de S_1 ($S_2 = S_1^{-1}$)**, estando ambos conectados tal y como se indica en la Figura 17.

Nótese que, **para que un sistema sea invertible, es necesario que nunca presente la misma señal de salida ante dos o más señales de entrada distintas**, puesto que, si lo hiciera, sería imposible que su hipotético sistema inverso fuera capaz de discriminar ante qué señal de entrada está siendo generada dicha salida.

La propiedad de invertibilidad puede llegar a ser de mucho interés en la práctica, puesto que en muchos ámbitos se requiere el diseño de sistemas que anulen o compensen ciertos efectos: por ejemplo, ecualizar un canal de comunicaciones, compensar la reverberación acústica en una sala, etc.

A continuación, se propone un ejercicio de demostración de la propiedad de invertibilidad de diferentes sistemas.

Ejemplo 9

Sean los siguientes sistemas:

$$y(t) = T_{S_1}\{x(t)\} = tx(-2t) + 1 \tag{121}$$

$$y(t) = T_{S_2}\{x(t)\} = x^2(t) \tag{122}$$

$$y[n] = T_{S_3}\{x[n]\} = x[3n] \tag{123}$$

$$y[n] = T_{S_4}\{x[n]\} = x[n] - \frac{9}{10}y[n-1] \tag{124}$$

Se pide determinar cuáles de ellos son invertibles y cuáles no lo son.

Solución

a) En el caso de S_1, se observa que todas las operaciones y transformaciones presentes en su relación entrada-salida pueden ser compensadas una por una:

- La suma de la constante 1 se compensa restándola.
- El escalado en factor 2 y el cambio de signo de la variable independiente se compensan volviendo a cambiarle el signo a la variable independiente y escalándola en factor $1/2$.
- El producto por t se compensa multiplicando por $1/t$, pero, debido a que la compensación anterior es una transformación de la variable independiente, este $1/t$ se convierte en un $-2/t$.

Así pues, proponemos el sistema S_{11} como posible sistema inverso de S_1:

$$T_{S_{11}}\{x(t)\} = -\frac{2}{t}\left(x\left(-\frac{1}{2}t\right) - 1\right) \tag{125}$$

Aplicamos la definición de invertibilidad definida en (119) para comprobar si realmente lo es:

$$\begin{aligned} T_{S_{11}}\left\{T_{S_1}\{x(t)\}\right\} &= -\frac{2}{t}\left(y\left(-\frac{1}{2}t\right) - 1\right) = \\ &-\frac{2}{t}\left(\left(\left(-\frac{1}{2}t\right)x\left(-2\left(-\frac{1}{2}t\right)\right) + 1\right) - 1\right) = \\ &-\frac{2}{t}\left(\left(-\frac{1}{2}t\right)x(t) + 1 - 1\right) = -\frac{2}{t}\left(-\frac{1}{2}t\right)x(t) = x(t) \end{aligned} \tag{126}$$

Por tanto, **S_1 es un sistema invertible y S_{11} es su sistema inverso ($S_{11} = S_1^{-1}$)**:

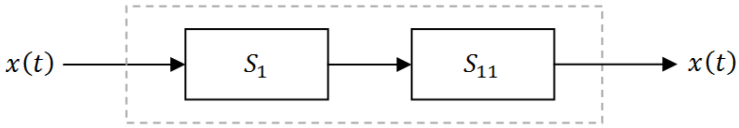

Figura 22. El sistema global S resultante de la asociación serie de S_1 y su sistema inverso S_{11}.

b) En este caso, se observa que **S_2 no es un sistema invertible**, puesto que es capaz de presentar la misma salida ante dos o más señales de entrada distintas; por ejemplo:

$$\left.\begin{aligned} y_1(t) &= T_{S_2}\{x_1(t) = 1\} = 1^2 = 1 \\ y_2(t) &= T_{S_2}\{x_2(t) = -1\} = (-1)^2 = 1 \end{aligned}\right\} y_1(t) = y_2(t) \tag{127}$$

Ante la tentación de definir un posible sistema inverso de S_2 que calcule la raíz cuadrada de la entrada (o que la eleve a $1/2$), sería necesario escoger entre la raíz cuadrada positiva o la negativa, puesto que un sistema no puede presentar simultáneamente dos salidas distintas ante una misma entrada.

c) En este caso, se observa que **S_3 no es un sistema invertible**, puesto que en S_3 se aplica un diezmo en factor 3 de la señal, de modo que hay muestras de la señal de entrada que se pierden en el diezmo y esa es una información que ya no se puede recuperar después (el hipotético sistema inverso de S_3 tendría que saber los valores de las muestras descartadas en el diezmo y eso es imposible).

d) Finalmente, se observa que el sistema S_4 es, de nuevo, el mismo sistema S_4 del Ejemplo 7 y el Ejemplo 8. Si nos fijamos en la ecuación (118), vemos lo siguiente:

$$y[n] = T_{S_4}\{x[n]\} = x[n] - 0.9x[n-1] + (0.9)^2x[n-2] - (0.9)^3x[n-3] + \cdots \tag{128}$$

O sea, que la salida de S_4 es una serie infinita de versiones atrasadas de la señal de entrada que cumple con las siguientes características:

- El retardo aplicado a $x[n]$ en cada término de la serie es una unidad mayor que el aplicado en el término inmediatamente anterior.
- El signo de cada término de la serie es el opuesto al del término inmediatamente anterior.
- El factor de amplitud de cada término de la serie es igual a 0.9 por el factor de amplitud del término inmediatamente anterior.

Por estas razones, es posible anular cada término de la serie salvo el primero ($x[n]$) sumándole el término inmediatamente anterior multiplicado por 0.9. Por tanto, proponemos el sistema S_{44} como posible sistema inverso de S_4:

$$T_{S_{44}}\{x[n]\} = x[n] + \frac{9}{10}x[n-1] \tag{129}$$

Aplicamos la definición de invertibilidad definida en (120) para comprobar si realmente lo es:

$$\begin{aligned} T_{S_{44}}\left\{T_{S_4}\{x[n]\}\right\} &= (x[n] - 0.9x[n-1] + (0.9)^2x[n-2] - (0.9)^3x[n-3] + \cdots) \\ &\quad + \frac{9}{10}(x[n-1] - 0.9x[n-2] + (0.9)^2x[n-3] - \cdots) = \\ x[n] - 0.9x[n-1] &+ (0.9)^2x[n-2] - (0.9)^3x[n-3] + \cdots \\ &+ 0.9x[n-1] - (0.9)^2x[n-2] + (0.9)^3x[n-3] - \cdots = x[n] \end{aligned} \tag{130}$$

Por tanto, **S_4 es un sistema invertible y S_{44} es su sistema inverso ($S_{44} = S_4^{-1}$)**:

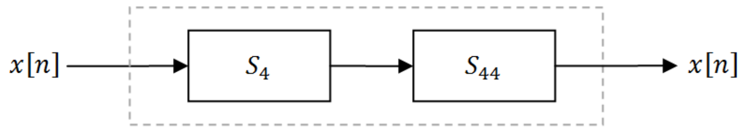

Figura 23. El sistema global S resultante de la asociación serie de S_4 y su sistema inverso S_{44}.

En general, **los lazos de realimentación que suman a la señal de entrada versiones desplazadas de la señal de salida multiplicadas por una constante pueden compensarse restando las mismas versiones desplazadas de la señal de entrada multiplicadas por la misma constante, y viceversa**; es decir:

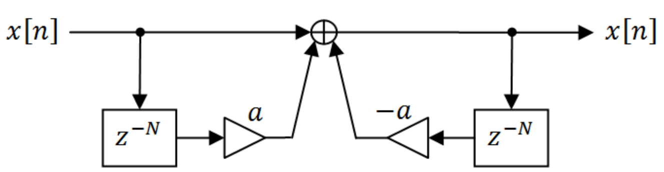

Figura 24. Compensación entre retardo de la entrada y lazo de realimentación de la salida.

La realización de este ejercicio nos permite observar que, en general, **no es fácil determinar si un sistema es invertible**. Habitualmente, poder hacerlo pasa por proponer un posible sistema inverso y demostrar que lo es. En este sentido, una estrategia razonable pasa por tratar de ir compensando una a una las operaciones y transformaciones presentes en la relación entrada-salida del sistema que se pretende invertir (tal y como hemos hecho, por ejemplo, con el sistema S_1 en el ejercicio anterior). Sin embargo, **que no seamos capaces de encontrarle un**

sistema inverso a un sistema dado en ningún caso demuestra que dicho sistema no sea invertible. Otra estrategia bastante razonable es la de buscar aspectos no compensables en la relación entrada-salida del sistema que se pretende invertir (tal y como hemos hecho, por ejemplo, con los sistemas S_2 y S_3 en el ejercicio anterior). De hallar alguno, sí puede ser mucho más fácil demostrar que el sistema no es invertible.

4.7. Acerca de las propiedades de los sistemas «caja negra»

En los apartados anteriores hemos visto que demostrar qué propiedades posee o no posee un sistema requiere conocer su relación entrada-salida (o, en su defecto, su diagrama de bloques), esto es, conocer el sistema en su totalidad. Sin embargo, una situación que perfectamente puede darse en la práctica es la de trabajar con sistemas cuya relación entrada-salida es desconocida, es decir, y como ya vimos al final de la sección 2, trabajar con sistemas tipo «caja negra».

En esta clase de situaciones no se dispone de un conocimiento completo del comportamiento del sistema, sino de información parcial acerca del mismo: **únicamente se conocen las señales de salida que el sistema genera al ser excitado mediante determinadas señales de entrada**; es decir, y sin pérdida de generalidad (esto mismo también puede darse en sistemas híbridos):

$$y_i(t) = T_S\{x_i(t)\}, \forall i \in \{1, \dots, M\} \tag{131}$$

$$y_i[n] = T_S\{x_i[n]\}, \forall i \in \{1, \dots, M\} \tag{132}$$

allí donde M es el número finito de pares señal de entrada/señal de salida conocidos, y S es un sistema «caja negra» analógico en (131), y digital en (132).

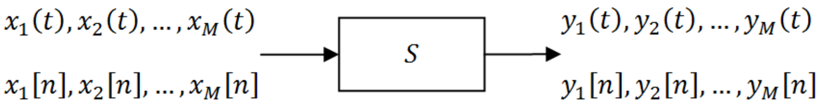

Figura 25. Sistema «caja negra» del que solo se tiene un conocimiento parcial: se conocen M señales de salida que el sistema genera ante M señales de entrada conocidas.

Esta situación puede darse, por ejemplo, al modelizar un canal de comunicaciones (se envía una señal piloto a través del canal desde el emisor y se observa cuál es la señal recibida en el receptor) o la respuesta acústica de una sala (se genera una señal acústica mediante un altavoz desde un punto de la sala y se capta la señal generada en otro punto de la sala mediante un micrófono): siendo la relación entrada-salida del sistema desconocida, excitarlo con ciertas señales de entrada conocidas y analizar su respuesta ante tales señales puede servir para obtener una estimación del comportamiento general del sistema.

En todo caso, **demostrar que un sistema «caja negra» posee una cierta propiedad es imposible**. Esto es así debido a que, como ya hemos visto, si un sistema posee una cierta propiedad, la posee siempre, en cualquier circunstancia y ante cualquier señal de entrada. Así, demostrar de esta manera si un sistema posee una cierta propiedad requeriría conocer su salida ante todas las posibles señales de entrada que se le puedan llegar a presentar, es decir, ante infinitas señales de entrada diferentes. Y, obviamente, eso nunca será posible.

Por tanto, lo más que puede llegar a demostrarse en situaciones de este estilo es lo siguiente:

Dados un sistema «caja negra» S y una cierta propiedad P:

- **Si no hay contradicción** entre el comportamiento conocido de S y el comportamiento esperable de un sistema que posea P, **como mucho, puede afirmarse que el sistema S podría poseer la propiedad P**.
- **Si hay contradicción** entre el comportamiento conocido de S y el comportamiento esperable de un sistema que posea P, **sí puede afirmarse que el sistema S no posee la propiedad P**.

A continuación, se propone un ejercicio de determinación de las propiedades de sistemas «caja negra» de los que solo se conoce qué señales de salida generan ante determinadas señales de entrada.

Ejemplo 10

Sean dos sistemas S_1 y S_2, cuyas relaciones entrada-salida son desconocidas. Se pide lo siguiente:

a) Caracterizar el sistema S_1, sabiendo que:

$$y_1(t) = T_{S_1}\{x_1(t) = 1\} = 1 \tag{133}$$

$$y_2(t) = T_{S_1}\{x_2(t) = \cos(200\pi t)\} = 1 \tag{134}$$

$$y_3(t) = T_{S_1}\{x_3(t) = \cos^2(100\pi t)\} = 2^t \tag{135}$$

b) Caracterizar el sistema S_2, sabiendo que:

$$y_1[n] = T_{S_2}\{x_1[n] = u[n]\} = \delta[n] \tag{136}$$

$$y_2[n] = T_{S_2}\{x_2[n] = u[n-1]\} = \delta[n-1] \tag{137}$$

Solución

a) De entrada, se observa que S_1 es un sistema analógico, puesto que tanto sus señales de entrada como de salida lo son.

En primer lugar, vemos que S_1 no posee la propiedad de linealidad. Para deducir esto, no hay más que fijarse en las señales de entrada asociadas a las salidas conocidas de S_1 y recordar la identidad trigonométrica del coseno del ángulo doble:

$$\cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1 \tag{138}$$

Por tanto, vemos que:

$$x_2(t) = 2x_3(t) - x_1(t) \tag{139}$$

Así, si S_1 fuese lineal, tendría que cumplirse lo siguiente:

$$y_2(t) = 2y_3(t) - y_1(t) \tag{140}$$

Sin embargo, la información de la que disponemos ya nos indica que esto no se cumple:

$$\left.\begin{array}{l} y_2(t) = 1 \\ 2y_3(t) - y_1(t) = 2^{t+1} + 1 \end{array}\right\} \Rightarrow y_2(t) \neq 2y_3(t) - y_1(t) \tag{141}$$

Por lo tanto, esto ya nos permite afirmar que $\boldsymbol{S_1}$ **es un sistema no lineal**.

En segundo lugar, la información de la que disponemos no nos permite afirmar nada respecto de la posible invariancia temporal de S_1, puesto que ninguna de las señales de entrada conocidas es una versión atrasada o adelantada en el tiempo de alguna de las otras. Así, **tanto puede que $\boldsymbol{S_1}$ sea invariante en el tiempo como que no lo sea**.

En tercer lugar, la información de la que disponemos no nos permite afirmar nada respecto de la posible causalidad de S_1, puesto que todas las señales de entrada conocidas empiezan en $t \to -\infty$. Así, **tanto puede que $\boldsymbol{S_1}$ sea causal como que no lo sea**.

En cuarto lugar, vemos que S_1 tampoco posee la propiedad de estabilidad. Para deducir esto, no hay más que fijarse en que uno de los pares señal de entrada/señal de salida conocidos entra en contradicción con el principio de estabilidad; concretamente, mientras que $x_3(t)$ es una señal de entrada acotada en amplitud, $y_3(t)$ es una señal de salida sin cota superior:

$$\begin{gathered} |x_3(t)| = |\cos^2(100\pi t)| \leq 1 \\ \lim_{t\to+\infty} y_3(t) = \lim_{t\to+\infty} 2^t = +\infty \implies |y_3(t)| \nleq A \end{gathered} \tag{142}$$

siendo A un valor real finito. Por tanto, $\boldsymbol{S_1}$ **es un sistema inestable**.

En quinto lugar, la información de la que disponemos no nos permite afirmar nada respecto de la cantidad de memoria de S_1, puesto que todas las señales de entrada conocidas son infinitas con orientación a ambos lados. Así, **tanto puede que $\boldsymbol{S_1}$ sea un sistema instantáneo, como que tenga memoria finita, como que tenga memoria infinita**.

Y, finalmente, vemos que S_1 tampoco posee la propiedad de invertibilidad. Para deducir esto, no hay más que fijarse en que el sistema presenta la misma salida ante dos señales de entrada diferentes, lo cual, como sabemos, es un comportamiento que no puede ser invertido por otro sistema:

$$\begin{gathered} x_1(t) = 1 \neq x_2(t) = \cos(200\pi t) \\ y_1(t) = T_{S_1}\{x_1(t)\} = y_2(t) = T_{S_1}\{x_2(t)\} = 1 \end{gathered} \tag{143}$$

Por tanto, $\boldsymbol{S_1}$ **es un sistema no invertible**.

b) De entrada, se observa que S_2 es un sistema digital, puesto que tanto sus señales de entrada como de salida lo son.

En primer lugar, la información de la que disponemos no nos permite afirmar nada respecto de la posible linealidad de S_2. La prueba de que esto es así la tenemos en que, dados los dos pares conocidos de señal de entrada/señal de salida, hay, al menos, dos posibles sistemas (que denominaremos S_2' y S_2'') diferentes entre sí, compatibles con estos dos pares conocidos de señal de entrada/señal de salida, pero tales que uno es lineal y el otro no lo es:

$$y[n] = T_{S_2'}\{x[n]\} = x[n] - x[n-1] \;\Rightarrow\; \begin{cases} T_{S_2'}\{u[n]\} = \delta[n] \\ T_{S_2'}\{u[n-1]\} = \delta[n-1] \end{cases} \tag{144}$$

$$y[n] = T_{S_2''}\{x[n]\} = x^2[n] - x^2[n-1] \;\Rightarrow\; \begin{cases} T_{S_2''}\{u[n]\} = \delta[n] \\ T_{S_2''}\{u[n-1]\} = \delta[n-1] \end{cases} \tag{145}$$

allí donde S_2' es claramente lineal y S_2'' es claramente no lineal, debido a que eleva al cuadrado señales que dependen de la señal de entrada. Así pues, **tanto puede que S_2 sea lineal como que sea no lineal**.

En segundo lugar, y análogamente al caso de la propiedad de linealidad, la información de la que disponemos no nos permite afirmar nada respecto de la posible invariancia temporal de S_2. De nuevo, hay, al menos, dos sistemas posibles que podrían ser S_2, puesto que son compatibles con la información de la que disponemos, pero siendo uno invariante en el tiempo y el otro no:

$$y[n] = T_{S_2'}\{x[n]\} = x[n] - x[n-1] \;\Rightarrow\; \begin{cases} T_{S_2'}\{u[n]\} = \delta[n] \\ T_{S_2'}\{u[n-1]\} = \delta[n-1] \end{cases} \tag{146}$$

$$y[n] = T_{S_2''}\{x[n]\} = u[n](x[n] - x[n-1]) \;\Rightarrow\; \begin{cases} T_{S_2''}\{u[n]\} = \delta[n] \\ T_{S_2''}\{u[n-1]\} = \delta[n-1] \end{cases} \tag{147}$$

allí donde S_2' es claramente invariante en el tiempo y S_2'' es claramente variante en el tiempo, debido a que multiplica señales que dependen de la señal de entrada por valores que no se mantienen constantes a lo largo del tiempo ($u[n]$). Así pues, **tanto puede que S_2 sea invariante en el tiempo como que no lo sea**.

En tercer lugar, vemos que la información conocida acerca de S_2 es compatible con que el sistema sea causal, puesto que ninguna de las dos señales de salida conocidas empieza antes de que empiece su correspondiente señal de entrada:

$$\begin{cases} x_1[n] = u[n] = 0, \forall n < 0 \\ y_1[n] = T_{S_2}\{x_1[n]\} = \delta[n] = 0, \forall n < 0 \end{cases} \tag{148}$$

$$\begin{cases} x_2[n] = u[n-1] = 0, \forall n < 1 \\ y_2[n] = T_{S_2}\{x_2[n]\} = \delta[n-1] = 0, \forall n < 1 \end{cases} \tag{149}$$

De este modo, **S_2 podría ser un sistema causal, aunque nada permite descartar la posibilidad de que no lo sea**.

En cuarto lugar, vemos que la información conocida acerca de S_2 es compatible con que el sistema sea estable, puesto que las dos señales de entrada conocidas están acotadas en amplitud y también lo están las dos señales de salida conocidas:

$$\begin{cases} |x_1[n]| = |u[n]| \leq 1 \\ |y_1[n]| = \left|T_{S_2}\{x_1[n]\}\right| = |\delta[n]| \leq 1 \end{cases} \tag{150}$$

$$\begin{cases} |x_2[n]| = |u[n-1]| \leq 1 \\ |y_2[n]| = \left|T_{S_2}\{x_2[n]\}\right| = |\delta[n-1]| \leq 1 \end{cases} \tag{151}$$

De este modo, **S_2 podría ser un sistema estable, aunque nada permite descartar la posibilidad de que no lo sea**.

En quinto lugar, la información de la que disponemos no nos permite afirmar mucho acerca de la cantidad de memoria de S_2, puesto que cada señal de salida conocida empieza en la misma muestra en la que empieza su correspondiente señal de entrada, como ya hemos señalado, de hecho, en (148) y (149).

Sin embargo, sí sucede que la información disponible acerca de S_2 no es compatible con que el sistema sea instantáneo, puesto que, en ambos pares conocidos de señal de entrada/señal de salida, la amplitud de la señal de salida es 0 para valores de n en los que la amplitud de la señal de entrada tanto es 0 como 1 (por ejemplo, y en ambos casos, para $n < 0$ y para $n > 1$):

$$\begin{cases} x_1[n] = u[n] = 0, \forall n < 0 \\ x_1[n] = u[n] = 1, \forall n > 1 \\ y_1[n] = T_{S_2}\{x_1[n]\} = \delta[n] = 0 \quad \text{para} \quad n < 0 \text{ y } n > 1 \end{cases} \tag{152}$$

$$\begin{cases} x_2[n] = u[n-1] = 0, \forall n < 0 \\ x_2[n] = u[n-1] = 1, \forall n > 1 \\ y_2[n] = T_{S_2}\{x_2[n]\} = \delta[n-1] = 0 \quad \text{para} \quad n < 0 \text{ y } n > 1 \end{cases} \tag{153}$$

Por tanto, no es posible que la única información acerca de la señal de entrada que S_2 maneje al calcular la salida sea su valor actual, puesto que, en ambos casos, para $n > 1$ el sistema está recordando que algo ha sucedido antes, de manera que, y a diferencia de lo que sucede para $n < 0$, la amplitud de la salida para $n > 1$ no es 1, sino 0.

Así pues, **S_2 no es un sistema instantáneo, y tanto puede que tenga memoria finita, como que tenga memoria infinita**.

Y, finalmente, la información de la que disponemos no nos permite afirmar nada respecto de la invertibilidad de S_2, puesto que, como ya hemos visto en (144) y (145), sería posible que fuese invertible (S_2'), pero también sería posible que fuese no invertible (S_2''). Así pues, **tanto puede que S_2 sea un sistema invertible, como que no lo sea**.

Resumen

En este módulo, hemos completado la introducción a la teoría de señales y sistemas, limitando nuestro estudio, sin que ello implique una pérdida de generalidad, a los sistemas analógicos y digitales de una entrada y una salida.

En términos generales, hemos visto cómo modelizar matemáticamente un sistema mediante su relación entrada-salida, así como también en forma de diagrama de bloques. A continuación, hemos presentado y estudiado los sistemas típicos más habituales en la práctica, incluyendo una presentación general del fenómeno de la realimentación en sistemas y las distintas formas básicas de asociación de sistemas.

Finalmente, hemos estudiado las diferentes propiedades que puede poseer o no un sistema (linealidad, invariancia temporal, causalidad, estabilidad, memoria e invertibilidad), hemos trabajado cómo demostrar si un sistema cuya relación entrada-salida es conocida posee o no cada una de estas propiedades. Y, para acabar, hemos estudiado la problemática que presentan los sistemas «caja negra» (esto es, sistemas cuya relación entrada-salida no es conocida) a la hora de tratar de determinar cuáles son sus propiedades (planteando algunas estrategias posibles en este sentido).

En el siguiente módulo, vamos a limitar aún más el foco de la teoría y vamos a centrarnos en el estudio de los sistemas lineales e invariantes en el tiempo. A grandes rasgos, vamos a ver cómo, gracias a las propiedades de las señales delta, estos sistemas pueden ser caracterizados mediante su respuesta impulsional y, al final del módulo, vamos a descubrir que todo sistema lineal e invariante en el tiempo cumple con un importante teorema, que será lo que nos permitirá, ya en módulos posteriores, introducir la noción de transformada de una señal y pasar a trabajar con las señales y los sistemas tanto en el dominio del tiempo como en el dominio de la frecuencia.

Ejercicios de autoevaluación

1. Respecto de un sistema S tal que $y(t) = T_S\{x(t)\} = x^3(-2t)$, ¿cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas?

(a) Su respuesta impulsional es $h(t) = \delta(t)$.

(b) Su salida ante un escalón unitario es $T_S\{x(t) = u(t)\} = u(t)$.

(c) Su salida ante una señal constante de amplitud A es $T_S\{x(t) = A\} = (-A)^3$.

(d) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

2. Respecto de un sistema S tal que $y[n] = T_S\{x[n]\} = x[n] - y[n-1]$, ¿cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas?

(a) Su respuesta impulsional es $h[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$.

(b) Su salida ante un escalón unitario es $T_S\{x[n] = u[n]\} = \cos^2\left(\frac{\pi}{2}n\right)$.

(c) Su salida ante una señal constante de amplitud A es $T_S\{x[n] = A\} = 2A$.

(d) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

3. Respecto de un sistema S tal que $y(t) = T_S\{x(t)\} = t\frac{d^2x(t)}{dt^2}$, ¿cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas?

(a) El sistema S es lineal, invariante en el tiempo, causal, estable, instantáneo e invertible.

(b) El sistema S es no lineal, invariante en el tiempo, no causal, estable, de memoria finita y no invertible.

(c) El sistema S es lineal, variante en el tiempo, causal, inestable, de memoria finita e invertible.

(d) El sistema S es no lineal, variante en el tiempo, causal, inestable, instantáneo y no invertible.

4. Respecto de un sistema S tal que $y[n] = T_S\{x[n]\} = x^2[n] - \frac{1}{2}y[n-1]$, ¿cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas?

(a) El sistema S es no lineal, invariante en el tiempo, causal, estable, de memoria finita e invertible.

(b) El sistema S es lineal, variante en el tiempo, causal, estable, de memoria finita e invertible.

(c) El sistema S es no lineal, invariante en el tiempo, no causal, inestable, de memoria infinita e no invertible.

(d) El sistema S es no lineal, invariante en el tiempo, causal, estable, de memoria infinita y no invertible.

Soluciones a los ejercicios de autoevaluación

1. La respuesta correcta es la **(a)**.

2. La respuesta correcta es la **(b)**.

3. La respuesta correcta es la **(c)**.

4. La respuesta correcta es la **(d)**.

Bibliografía

Oppenheim, A. V., Schafer, R. W., & Buck, J. R. (1999). *Discrete-Time Signal Processing* (2nd ed.). Prentice Hall, Signal Processing Series (Capítulo 2).

Oppenheim, A. V., Willsky, A. S., & Nawab, S. H. (1996). *Signals & Systems* (2nd ed.). Prentice Hall, Signal Processing Series (Capítulo 1).

Palm III, W. J. (2010). *Introduction to MATLAB for Engineers* (3rd ed.). McGraw-Hill.

Proakis, J. G., & Manolakis, D. G. (2007). *Digital Signal Processing* (4th ed.). Prentice Hall (Capítulos 1 y 2).