

Universitat Oberta de Catalunya (UOC)

Caracterización temporal de sistemas LIT

Convolución, caracterización de sistemas LIT mediante su respuesta impulsional y su relación entrada-salida, teorema de las autofunciones

Índice

Introducción	6
Objetivos.....	8
1. La operación convolución	9
1.1. Deducción de la convolución	10
1.1.1. Sistemas LIT analógicos: la integral de convolución	10
1.1.2. Sistemas LIT digitales: el sumatorio de convolución.....	11
1.1.3. Los sistemas LIT y su respuesta impulsional	11
1.2. Propiedades de la convolución	13
1.2.1. Propiedad conmutativa	13
1.2.2. Propiedad asociativa	14
1.2.3. Propiedad distributiva	15
1.2.4. Elemento neutro	16
1.2.5. Producto por constante	16
1.2.6. Desplazamiento horizontal	17
1.3. Cálculo de la convolución.....	20
1.3.1. Convolución de dos señales finitas	22
1.3.2. Convolución con al menos una señal infinita orientada a un lado	34
1.3.3. Convolución con al menos una señal infinita orientada a ambos lados	51
2. Caracterización de sistemas LIT mediante su respuesta impulsional.....	57
2.1. Cálculo de la salida en sistemas LIT.....	57
2.2. Propiedades de los sistemas LIT.....	61
2.2.1. Causalidad en sistemas LIT.....	62
2.2.2. Estabilidad en sistemas LIT.....	63
2.2.3. Memoria en sistemas LIT	64
2.2.4. Invertibilidad en sistemas LIT	65
2.3. Asociación de sistemas LIT	67
2.3.1. Asociación de sistemas LIT en serie	67
2.3.2. Asociación de sistemas LIT en paralelo	68
2.3.3. Asociación de sistemas LIT en lazo de realimentación	69
2.3.4. Asociaciones de sistemas LIT híbridas.....	70
2.4. Analogía intuitiva entre sistemas LIT y matrices	73
3. Relación entrada-salida de sistemas LIT	76
3.1. Sistemas LIT analógicos causales: ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes	77
3.2. Sistemas LIT digitales causales: ecuación en diferencias lineal de coeficientes constantes	81

4. Teorema de las autofunciones	86
4.1. Autofunciones de los sistemas LIT analógicos	86
4.2. Autofunciones de los sistemas LIT digitales.....	90
4.3. Acerca del concepto de «transformada de una señal».....	94
Resumen	98
Ejercicios de autoevaluación	99
Soluciones a los ejercicios de autoevaluación	102
Bibliografía.....	103

Introducción

En el módulo anterior, se han presentado y estudiado las propiedades fundamentales que puede poseer un sistema: linealidad, invariancia temporal, causalidad, estabilidad, memoria e invertibilidad. De entre ellas, las dos primeras (la linealidad y la invariancia temporal) son singularmente importantes para la teoría de señales y sistemas. Tanto es así, que en este módulo, y en los módulos posteriores, vamos a centrar el foco de nuestro estudio en aquellos sistemas que poseen simultáneamente ambas propiedades: los sistemas LIT (lineales e invariantes en el tiempo).

Pero, ¿cuáles son las razones de la importancia de estas dos propiedades? Fundamentalmente, son dos:

1. Una gran cantidad de procesos físicos poseen estas dos propiedades, o, en su defecto, pueden ser modelizados como sistemas LIT de forma tal que la modelización obtenida es lo suficientemente exacta y robusta como para poder trabajar con ella.
2. La familia de los sistemas LIT posee la peculiaridad de que puede ser estudiada y analizada en su totalidad y en un alto grado de detalle mediante un único corpus teórico; es decir, que todo sistema LIT, por el mero hecho de serlo, puede ser modelizado y estudiado exactamente del mismo modo que cualquier otro sistema LIT. Esto no sucede, por ejemplo, con los sistemas no lineales. No existe una teoría general de los sistemas no lineales que permita englobar bajo un mismo paraguas toda la familia de sistemas no lineales: cada sistema no lineal presenta sus peculiaridades y ha de ser estudiado de forma individualizada.

De hecho, la combinación de ambas razones es de gran importancia en el campo de la ingeniería, puesto que el manejo de una única teoría de sistemas ya permite el desarrollo de muchos de los ámbitos de trabajo propios de dicho campo: electrónica, sistemas de comunicaciones, antenas, procesamiento de audio, etc.

Así pues, en el presente módulo se desarrolla la parte de la teoría de señales y sistemas consistente en la modelización y caracterización de los sistemas LIT en el dominio del tiempo. La primera sección del módulo está dedicada a presentar la operación convolución, entendida tanto como mecanismo de obtención de la señal de salida de un sistema LIT a partir de su respuesta impulsional, como operación que puede establecerse entre dos señales cualesquiera y que, como tal, posee unas ciertas propiedades y acarrea un cierto procedimiento de cálculo.

En la sección segunda, veremos cómo todo sistema LIT puede ser caracterizado en su totalidad a partir únicamente de su respuesta impulsional: tanto el cálculo de su salida ante cualquier señal de entrada (esto ya se ve en la sección primera), como los sistemas resultantes de la asociación de sistemas LIT, o las propiedades que puede poseer o no un sistema LIT.

A continuación, en la tercera sección del módulo, se presenta la forma que adopta la relación entrada-salida de los sistemas LIT que más habitualmente nos encontraremos en la práctica.

Veremos cómo obtener la respuesta impulsional de dichos sistemas y, también, cómo pueden ser caracterizados atendiendo a la forma de su relación entrada-salida.

Y, finalmente, la sección cuarta está dedicada a presentar, demostrar y analizar un importante teorema que cumple todo sistema LIT: el teorema de las autofunciones. Además de ver en qué consiste y cuál es su utilidad práctica, también veremos que las consecuencias de este teorema son de una importancia capital en la teoría de señales y sistemas.

Objetivos

Los principales objetivos de este módulo son los siguientes:

1. Conocer la operación convolución, saber deducir su origen y conocer tanto sus propiedades como su procedimiento de cálculo.
2. Entender que conocer la respuesta impulsional de un sistema LIT es equivalente a conocer el sistema en su totalidad.
3. Saber cómo caracterizar enteramente el comportamiento de cualquier sistema LIT solo a partir de su respuesta impulsional.
4. Entender que, en términos algebraicos, un sistema LIT no es sino una matriz, puesto que implementa una transformación lineal de una señal (*i.e.* d'un vector).
5. Conocer la forma que adopta la relación entrada-salida de los sistemas LIT más habituales en la práctica.
6. Saber calcular la respuesta impulsional de los sistemas LIT más habituales en la práctica, así como caracterizar su comportamiento, a partir de su relación entrada-salida.
7. Conocer el teorema de las autofunciones y saber demostrar por qué todo sistema LIT cumple dicho teorema.
8. Entender el significado del teorema de las autofunciones de los sistemas LIT, saber cuáles son sus consecuencias y comprender el alcance y la importancia de dichas consecuencias.

1. La operación convolución

En esta sección se presenta una nueva operación entre señales. Es decir, en esencia, y más allá de las operaciones básicas entre señales que ya conocemos (suma, resta, producto, división y potencia), vamos a definir un mecanismo de cálculo que, dadas dos o más señales, va a dar como resultado una nueva señal. Esta nueva operación se denomina «convolución» y, como seguidamente veremos, tiene su origen en la deducción de cuál es la forma que adopta la señal de salida de todo sistema LIT ante cualquier señal presente en su entrada.

A modo de recordatorio, conviene tener muy presente que, de ahora en adelante, vamos a trabajar siempre con sistemas LIT, o sea, con sistemas que poseen, al menos y simultáneamente, las propiedades de linealidad e invariancia temporal. En este sentido, si recuperamos las definiciones de ambas propiedades (ya presentadas y estudiadas en el módulo anterior) y las unimos en una única definición, podemos afirmar que todo sistema LIT, por el mero hecho de serlo, cumple con lo siguiente:

Todo sistema LIT preserva en su salida toda posible combinación lineal y todo posible desplazamiento horizontal de cualesquiera señales que estén presentes en su entrada.

Por lo tanto, **dada una combinación lineal arbitraria de cualesquiera M señales arbitrariamente desplazadas en el tiempo que esté presente en la entrada de un sistema LIT S , su salida será la misma combinación lineal de las M respuestas del sistema S ante cada una de esas señales sin desplazar por separado, estando sometida cada una de esas respuestas al mismo desplazamiento horizontal arbitrario al que está sometida su correspondiente señal de entrada:**

$$y(t) = T_S\{x(t)\} = T_S\left\{\sum_{i=1}^M a_i x_i(t \pm t_i)\right\} = \sum_{i=1}^M a_i T_S\{x_i(t \pm t_i)\} = \sum_{i=1}^M a_i y_i(t \pm t_i) \quad (1)$$

$$y[n] = T_S\{x[n]\} = T_S\left\{\sum_{i=1}^M a_i x_i[n \pm n_i]\right\} = \sum_{i=1}^M a_i T_S\{x_i[n \pm n_i]\} = \sum_{i=1}^M a_i y_i[n \pm n_i] \quad (2)$$

allí donde $M \in \mathbb{Z}$, con $M \geq 1$; donde los pesos a_i son constantes, en general, complejas ($a_i \in \mathbb{C}, \forall i \in \{1, \dots, M\}$); donde los desplazamientos t_i y n_i son constantes reales y enteras, respectivamente ($t_i \in \mathbb{R}, n_i \in \mathbb{Z}, \forall i \in \{1, \dots, M\}$); donde $y_i(t) = T_S\{x_i(t)\}$ e $y_i[n] = T_S\{x_i[n]\}, \forall i \in \{1, \dots, M\}$; y donde S es un sistema LIT analógico en (1) y un sistema LIT digital en (2).

Dicho todo lo cual, la operación convolución como tal es deducida, en primer lugar, en el apartado 1.1; y, en segundo lugar, los apartados 1.2 y 1.3 están dedicados al análisis de la operación convolución en cuanto que operación entre dos señales cualesquiera.

1.1. Deducción de la convolución

En este apartado, se llevan a cabo separadamente las deducciones de la convolución analógica y la convolución digital en los subapartados 1.1.1 y 1.1.2, respectivamente. Esto es debido a que, aunque ambos procesos de deducción son análogos, la forma que adopta la operación es diferente en cada caso.

Una vez hechas ambas deducciones, ya sabremos en qué consiste la operación y ya podremos entender la importancia de la respuesta impulsional en los sistemas LIT, cuestión que es abordada en el subapartado 1.1.3.

1.1.1. Sistemas LIT analógicos: la integral de convolución

De entrada, recordemos que **la respuesta impulsional de cualquier sistema analógico S se define como la salida del sistema cuando su entrada es una delta de Dirac:**

$$h(t) = T_S\{\delta(t)\} \quad (3)$$

Entonces, como ya se mostró en el primer módulo, **toda señal analógica puede ser expresada como el resultado de una combinación lineal de deltas de Dirac ponderadas por los valores de amplitud de la señal:**

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \quad (4)$$

Esto nos permite expresar cualquier señal presente en la entrada de cualquier sistema analógico S bajo la forma de dicha combinación lineal:

$$y(t) = T_S\{x(t)\} = T_S\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau\right\} \quad (5)$$

Si S es un sistema LIT, podemos aplicar (1) y (3) en (5) y expresar su salida tal que así:

$$y(t) = T_S\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\underbrace{T_S\{\delta(t-\tau)\}}_{h(t-\tau)}d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad (6)$$

Por tanto, **la señal de salida de cualquier sistema LIT analógico es el resultado de una operación entre su señal de entrada y su respuesta impulsional denominada «integral de convolución»** (en general, indicada mediante el símbolo $*$):

$$y(t) = T_S\{x(t)\} = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad (7)$$

1.1.2. Sistemas LIT digitales: el sumatorio de convolución

Análogamente, recordemos también que **la respuesta impulsional de cualquier sistema digital S se define como la salida del sistema cuando su entrada es una delta discreta:**

$$h[n] = T_S\{\delta[n]\} \quad (8)$$

Entonces, como ya se mostró en el primer módulo, **toda señal digital puede ser expresada como el resultado de una combinación lineal de deltas discretas ponderadas por los valores de amplitud de la señal:**

$$x[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]\delta[n-m] \quad (9)$$

Esto nos permite expresar cualquier señal presente en la entrada de cualquier sistema digital S bajo la forma de dicha combinación lineal:

$$y[n] = T_S\{x[n]\} = T_S\left\{\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]\delta[n-m]\right\} \quad (10)$$

Si S es un sistema LIT, podemos aplicar (2) y (8) en (10) y expresar su salida tal que así:

$$y[n] = T_S\left\{\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]\delta[n-m]\right\} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m] \underbrace{T_S\{\delta[n-m]\}}_{h[n-m]} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]h[n-m] \quad (11)$$

Por tanto, **la señal de salida de cualquier sistema LIT digital es el resultado de una operación entre su señal de entrada y su respuesta impulsional denominada «sumatorio de convolución»** (en general, indicada mediante el símbolo $*$):

$$y[n] = T_S\{x[n]\} = x[n] * h[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]h[n-m] \quad (12)$$

1.1.3. Los sistemas LIT y su respuesta impulsional

Como ya se ha indicado, la convolución es una operación perfectamente aplicable a dos señales cualesquiera, al margen de que estas sean o no la señal de entrada y la respuesta impulsional de un sistema LIT, respectivamente. Ahora bien, de las ecuaciones (7) y (12) se derivan consecuencias de gran importancia para la caracterización de los sistemas LIT.

En primer lugar, de (7) y (12) se sigue que **la respuesta impulsional de un sistema LIT permite conocer, mediante el cálculo de la convolución, la salida del sistema ante cualquier señal de entrada**, la cual cosa equivale a conocer al sistema en su totalidad. Como ya sabemos, es la relación entrada-salida de un sistema lo que permite calcular su salida ante cualquier entrada, y esto es debido a que la relación entrada-salida describe el sistema en su totalidad. Por tanto,

y análogamente, **la respuesta impulsional de un sistema LIT describe al sistema en su totalidad, permitiendo su completa caracterización**. Esta cuestión será estudiada en detalle en la sección 2 de este mismo módulo, una vez completada la presentación de la operación convolución como tal que se lleva a cabo en esta primera sección.

En segundo lugar, de lo anterior se deduce que la importancia de las señales delta no se limita únicamente a la caracterización de cualquier señal (como ya vimos en el primer módulo), sino que, indirectamente, también permiten caracterizar cualquier sistema LIT del cual se conozca su respuesta impulsional (esto es, su salida ante una señal delta). En el apartado 1.2 de este mismo módulo, al estudiar las propiedades de la operación convolución, veremos que varias de ellas pueden ser consideradas como una ampliación de las propiedades de las señales delta.

Finalmente, y en tercer lugar, dada su estrecha relación con la señal delta, sucede que la señal escalón unitario también es de gran importancia en la caracterización de los sistemas LIT. Recordemos cómo puede obtenerse la señal delta a partir de la señal escalón unitario:

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u(t + \Delta t) - u(t)}{\Delta t} \quad (13)$$

$$\delta[n] = u[n] - u[n - 1] \quad (14)$$

Se observa que ambas expresiones están constituidas por operaciones estrictamente lineales e invariantes en el tiempo:

- En (13), la delta de Dirac es expresada como la resta de dos señales dividida entre una constante (muy pequeña, de ahí el límite), donde ambas señales son un escalón unitario adelantado Δt segundos y un escalón unitario sin más.
- Por su parte, en (14), la delta discreta es expresada como la resta de un escalón unitario menos un escalón unitario atrasado una muestra.

Claramente, por tanto, **la respuesta impulsional de un sistema LIT S puede obtenerse directamente a partir de su respuesta ante un escalón unitario**:

$$h(t) = T_S\{\delta(t)\} = T_S\left\{\frac{du(t)}{dt}\right\} = T_S\left\{\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u(t + \Delta t) - u(t)}{\Delta t}\right\} = \quad (15)$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{T_S\{u(t + \Delta t)\} - T_S\{u(t)\}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{y_u(t + \Delta t) - y_u(t)}{\Delta t} = \frac{dy_u(t)}{dt}$$

$$h[n] = T_S\{\delta[n]\} = T_S\{u[n] - u[n - 1]\} = T_S\{u[n]\} - T_S\{u[n - 1]\} = \quad (16)$$

$$y_u[n] - y_u[n - 1]$$

allí donde $y_u(t)$ es la salida del sistema LIT analógico S ante un escalón unitario en (15), y donde $y_u[n]$ es la salida del sistema LIT digital S ante un escalón unitario en (16).

De este modo, se observa que, dado cualquier sistema LIT «caja negra» del cual no se conoce nada más que su respuesta ante un escalón unitario, automáticamente también se conoce su respuesta impulsional, la cual puede ser calculada mediante (15) o (16), según corresponda. Obviamente, el cálculo inverso (es decir, la obtención de la salida del sistema LIT «caja negra»

ante un escalón unitario conocida solo su respuesta impulsional) también es posible mediante el cálculo de la convolución entre el escalón unitario y la respuesta impulsional, es decir, aplicando (7) o (12), según corresponda.

Así pues, **conocer la salida de un sistema LIT ante escalón unitario es equivalente a conocer su respuesta impulsional y, por tanto, es equivalente a conocer el sistema en su totalidad.**

1.2. Propiedades de la convolución

En este apartado se presentan las propiedades que posee la operación convolución entendida estrictamente como una operación entre dos señales cualesquiera. Por tanto, a lo largo de este apartado, así como a lo largo del apartado siguiente, se aplica la siguiente notación:

$$x_i(t) * x_j(t) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x_i(\tau) x_j(t - \tau) d\tau \quad (17)$$

$$x_i[n] * x_j[n] \triangleq \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_i[m] x_j[n - m] \quad (18)$$

allí donde $x_i(t)$ y $x_j(t)$ son dos señales analógicas cualesquiera, y $x_i[n]$ y $x_j[n]$ son dos señales digitales cualesquiera.

1.2.1. Propiedad conmutativa

La operación convolución es **conmutativa**, lo cual indica que **el orden de las señales implicadas en la convolución no afecta al resultado de la misma** (ver Demostración 1):

$$x_1(t) * x_2(t) = x_2(t) * x_1(t) \quad (19)$$

$$x_1[n] * x_2[n] = x_2[n] * x_1[n] \quad (20)$$

Demostración 1

En primer lugar, hacemos la demostración para el caso analógico. Sean $x_1(t)$ y $x_2(t)$ dos señales analógicas cualesquiera. Se tiene que:

$$\begin{aligned} x_1(t) * x_2(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) x_2(t - \tau) d\tau = \left\{ \begin{array}{l} (\sigma = t - \tau) \\ \tau = t - \sigma \\ d\tau = d(t - \sigma) = -d\sigma \\ \tau \rightarrow \pm\infty \Rightarrow \sigma \rightarrow \mp\infty \end{array} \right\} = \\ &= - \int_{+\infty}^{-\infty} x_1(t - \sigma) x_2(\sigma) d\sigma = \int_{-\infty}^{+\infty} x_2(\sigma) x_1(t - \sigma) d\sigma = x_2(t) * x_1(t) \end{aligned} \quad (21)$$

Y ahora demostramos el caso digital. Sean $x_1[n]$ y $x_2[n]$ dos señales digitales cualesquiera:

$$\begin{aligned}
 x_1[n] * x_2[n] &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_1[m]x_2[n-m] = \left\{ \begin{array}{l} (k = n - m) \\ m = n - k \\ m \rightarrow \pm\infty \Rightarrow k \rightarrow \mp\infty \end{array} \right\} = \\
 &\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1[n-k]x_2[k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_2[k]x_1[n-k] = x_2[n] * x_1[n]
 \end{aligned} \tag{22}$$

1.2.2. Propiedad asociativa

La operación convolución es **asociativa**, lo cual indica que **el orden de cálculo de convoluciones sucesivas no afecta al resultado final** (ver Demostración 2):

$$x_1(t) * x_2(t) * x_3(t) = (x_1(t) * x_2(t)) * x_3(t) = x_1(t) * (x_2(t) * x_3(t)) \tag{23}$$

$$x_1[n] * x_2[n] * x_3[n] = (x_1[n] * x_2[n]) * x_3[n] = x_1[n] * (x_2[n] * x_3[n]) \tag{24}$$

Demostración 2

Demostramos el caso analógico. Sean $x_1(t)$, $x_2(t)$ y $x_3(t)$ tres señales analógicas cualesquiera:

$$\begin{aligned}
 (x_1(t) * x_2(t)) * x_3(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau)x_2(\sigma-\tau)d\tau \right)}_{r(\sigma), \text{ siendo } r(t)=x_1(t)*x_2(t)} x_3(t-\sigma)d\sigma = \\
 &\int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x_2(\sigma-\tau)x_3(t-\sigma)d\sigma \right) d\tau = \left\{ \begin{array}{l} (\lambda = \sigma - \tau) \\ \sigma = \lambda + \tau \\ t - \sigma = (t - \tau) - \lambda \\ d\sigma = d(\lambda + \tau) = d\lambda \\ \sigma \rightarrow \pm\infty \Rightarrow \lambda \rightarrow \pm\infty \end{array} \right\} = \\
 &\int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x_2(\lambda)x_3((t-\tau)-\lambda)d\lambda \right)}_{p(t-\tau), \text{ siendo } p(t)=x_2(t)*x_3(t)} d\tau = x_1(t) * (x_2(t) * x_3(t))
 \end{aligned} \tag{25}$$

Demostramos el caso digital. Sean $x_1[n]$, $x_2[n]$ y $x_3[n]$ tres señales digitales cualesquiera:

$$\begin{aligned}
 (x_1[n] * x_2[n]) * x_3[n] &= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \underbrace{\left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_1[m]x_2[l-m] \right)}_{r[l], \text{ siendo } r[n]=x_1[n]*x_2[n]} x_3[n-l] = \\
 &\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_1[m] \left(\sum_{l=-\infty}^{+\infty} x_2[l-m]x_3[n-l] \right) = \left\{ \begin{array}{l} (k = l - m) \\ l = k + m \\ n - l = (n - m) - k \\ l \rightarrow \pm\infty \Rightarrow k \rightarrow \pm\infty \end{array} \right\} = \\
 &\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_1[m] \underbrace{\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_2[k]x_3[(n-m)-k] \right)}_{p[n-m], \text{ siendo } p[n]=x_2[n]*x_3[n]} = x_1[n] * (x_2[n] * x_3[n])
 \end{aligned} \tag{26}$$

Una vez demostradas las propiedades conmutativa y asociativa de la convolución, ya podemos afirmar que, en general, **la señal resultante del cálculo de dos o más convoluciones sucesivas:**

$$y(t) = x_1(t) * x_2(t) * \cdots * x_M(t) \quad (27)$$

$$y[n] = x_1[n] * x_2[n] * \cdots * x_M[n] \quad (28)$$

es independiente de cualquier cambio de orden en las señales implicadas en el cálculo (propiedad conmutativa) y del orden en el que se calculen las convoluciones de la sucesión (propiedad asociativa).

1.2.3. Propiedad distributiva

La operación convolución es **distributiva respecto de la suma**, lo cual indica que **la convolución de una suma es igual a la suma de convoluciones** (ver Demostración 3):

$$x_1(t) * (x_2(t) + x_3(t)) = (x_1(t) * x_2(t)) + (x_1(t) * x_3(t)) \quad (29)$$

$$x_1[n] * (x_2[n] + x_3[n]) = (x_1[n] * x_2[n]) + (x_1[n] * x_3[n]) \quad (30)$$

Demostración 3

Empezamos haciendo la demostración para el caso analógico. Sean $x_1(t)$, $x_2(t)$ y $x_3(t)$ tres señales analógicas cualesquiera:

$$\begin{aligned} x_1(t) * (x_2(t) + x_3(t)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau)(x_2(t - \tau) + x_3(t - \tau))d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau)x_2(t - \tau) + x_1(\tau)x_3(t - \tau)d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau)x_2(t - \tau)d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau)x_3(t - \tau)d\tau = (x_1(t) * x_2(t)) + (x_1(t) * x_3(t)) \end{aligned} \quad (31)$$

Y ahora hacemos la demostración para el caso digital. Sean $x_1[n]$, $x_2[n]$ y $x_3[n]$ tres señales digitales cualesquiera:

$$\begin{aligned} x_1[n] * (x_2[n] + x_3[n]) &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_1[m](x_2[n - m] + x_3[n - m]) = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_1[m]x_2[n - m] + x_1[m]x_3[n - m] = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_1[m]x_2[n - m] + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_1[m]x_3[n - m] = (x_1[n] * x_2[n]) + (x_1[n] * x_3[n]) \end{aligned} \quad (32)$$

1.2.4. Elemento neutro

La señal delta es el elemento neutro de la operación convolución; es decir, que la convolución de una señal delta con una señal cualquiera es igual a esa misma señal (ver Demostración 4):

$$x(t) * \delta(t) = x(t) \quad (33)$$

$$x[n] * \delta[n] = x[n] \quad (34)$$

Demostración 4

Estas demostraciones son triviales: simplemente hay que recordar la ecuación (4), para el caso analógico, y la ecuación (9), para el caso digital.

Demostramos el caso analógico. Sea $x(t)$ una señal analógica cualquiera:

$$x(t) * \delta(t) = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau}_{x(t)} = x(t) \quad (35)$$

Demostramos ahora el caso digital. Sea $x[n]$ una señal digital cualquiera:

$$x[n] * \delta[n] = \underbrace{\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m] \delta[n - m]}_{x[n]} = x[n] \quad (36)$$

1.2.5. Producto por constante

La convolución de dos señales cualesquiera estando una de ellas multiplicada por una constante arbitraria es igual al producto de la constante por la convolución de ambas señales (ver Demostración 5):

$$(Ax_1(t)) * x_2(t) = A(x_1(t) * x_2(t)), \quad \forall A \in \mathbb{C} \quad (37)$$

$$(Ax_1[n]) * x_2[n] = A(x_1[n] * x_2[n]), \quad \forall A \in \mathbb{C} \quad (38)$$

allí donde A es una constante arbitraria y, en general, compleja.

Demostración 5

Empezamos por la demostración para el caso analógico. Sean $x_1(t)$ y $x_2(t)$ dos señales analógicas cualesquiera y sea A una constante compleja cualquiera:

$$(Ax_1(t)) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} Ax_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau = A \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau = \quad (39)$$

$$A(x_1(t) * x_2(t)), \forall A \in \mathbb{C}$$

Y ahora hacemos la demostración para el caso digital. Sean $x_1[n]$ y $x_2[n]$ dos señales digitales cualesquiera y sea A una constante compleja cualquiera:

$$(Ax_1[n]) * x_2[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} Ax_1[m]x_2[n-m] = A \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_1[m]x_2[n-m] = \quad (40)$$

$$A(x_1[n] * x_2[n]), \forall A \in \mathbb{C}$$

1.2.6. Desplazamiento horizontal

La convolución de dos señales cualesquiera estando una de ellas sometida a un desplazamiento horizontal arbitrario es igual a la señal resultante de la convolución de ambas señales sin desplazar sometida a dicho desplazamiento horizontal (ver Demostración 6):

$$y(t) = x_1(t) * x_2(t) \Rightarrow x_1(t \pm t_0) * x_2(t) = y(t \pm t_0), \forall t_0 \in \mathbb{R} \quad (41)$$

$$y[n] = x_1[n] * x_2[n] \Rightarrow x_1[n \pm n_0] * x_2[n] = y[n \pm n_0], \forall n_0 \in \mathbb{Z} \quad (42)$$

allí donde t_0 y n_0 son constantes arbitrarias.

Demostración 6

Empezamos por la demostración para el caso analógico. Sean $x_1(t)$ y $x_2(t)$ dos señales analógicas cualesquiera, sea $y(t)$ la señal resultante de su convolución ($y(t) = x_1(t) * x_2(t)$) y sea t_0 una constante real cualquiera:

$$\begin{aligned} x_1(t \pm t_0) * x_2(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau \pm t_0)x_2(t-\tau)d\tau = \left\{ \begin{array}{l} (\sigma = \tau \pm t_0) \\ \tau = \sigma \mp t_0 \\ d\tau = d(\sigma \mp t_0) = d\sigma \\ \tau \rightarrow \pm\infty \Rightarrow \sigma \rightarrow \pm\infty \end{array} \right\} = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\sigma)x_2(t - (\sigma \mp t_0))d\sigma = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\sigma)x_2((t \pm t_0) - \sigma)d\sigma = \{t' = t \pm t_0\} = \quad (43) \\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau)x_2(t' - \tau)d\tau}_{y(t')} = y(t') = y(t \pm t_0), \forall t_0 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Y ahora hacemos la demostración para el caso digital. Sean $x_1[n]$ y $x_2[n]$ dos señales digitales cualesquiera, sea $y[n]$ la señal resultante de su convolución ($y[n] = x_1[n] * x_2[n]$) y sea n_0 una constante entera cualquiera:

$$\begin{aligned}
 x_1[n \pm n_0] * x_2[n] &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_1[m \pm n_0] x_2[n - m] = \left\{ \begin{array}{l} (k = m \pm n_0) \\ m = k \mp n_0 \\ m \rightarrow \pm\infty \Rightarrow k \rightarrow \pm\infty \end{array} \right\} = \\
 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1[k] x_2[n - (k \mp n_0)] &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1[k] x_2[(n \pm n_0) - k] = \{n' = n \pm n_0\} = \\
 \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1[k] x_2[n' - k]}_{y[n']} &= y[n'] = y[n \pm n_0], \forall n_0 \in \mathbb{Z}
 \end{aligned} \quad (44)$$

Una vez demostradas las propiedades conmutativa, distributiva, producto por constante y desplazamiento horizontal de la convolución, ya podemos afirmar la siguiente generalización:

Cualesquiera constantes arbitrarias o desplazamientos temporales arbitrarios aplicados a cualesquiera señales implicadas en una sucesión de convoluciones pueden ser ignorados al calcular la convolución y aplicados a la señal resultante de dicha convolución:

$$(A_1 x_1(t \pm t_1)) * \dots * (A_M x_M(t \pm t_M)) = (A_1 \dots A_M) y(t \pm t_1 \dots \pm t_M) \quad (45)$$

$$(A_1 x_1[n \pm n_1]) * \dots * (A_M x_M[n \pm n_M]) = (A_1 \dots A_M) y[n \pm n_1 \dots \pm n_M] \quad (46)$$

allí donde $A_i \in \mathbb{C}, t_i \in \mathbb{R}, n_i \in \mathbb{Z}, \forall i \in \{1, \dots, M\}$, donde $y(t) = x_1(t) * \dots * x_M(t)$, y donde $y[n] = x_1[n] * \dots * x_M[n]$, siendo $M \in \mathbb{Z}$ con $M \geq 1$.

Asimismo, hay otra consecuencia importante derivada de las propiedades del elemento neutro y desplazamiento horizontal de la convolución:

El desplazamiento horizontal arbitrario de cualquier señal puede expresarse como el resultado de la convolución de dicha señal sin desplazar con una señal delta sometida a ese desplazamiento:

$$x(t \pm t_0) = x(t) * \delta(t \pm t_0), \forall t_0 \in \mathbb{R} \quad (47)$$

$$x[n \pm n_0] = x[n] * \delta[n \pm n_0], \forall n_0 \in \mathbb{Z} \quad (48)$$

Finalmente, hay una última consecuencia relevante derivada de las propiedades de la convolución que atañe a las señales periódicas.

Considérese, de entrada, la señal periódica comúnmente denominada «**tren de deltas**», que no es más que una **señal periódica consistente en una suma infinita de señales delta uniformemente separadas, donde la separación entre dos deltas consecutivas es el periodo fundamental de la señal:**

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(t - mT_0) \quad (49)$$

$$x[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta[n - mN_0] \quad (50)$$

siendo $x(t)$ y $x[n]$ sendos trenes de deltas, analógico y digital, y de periodo fundamental T_0 y N_0 , respectivamente. Sus representaciones gráficas son las siguientes:

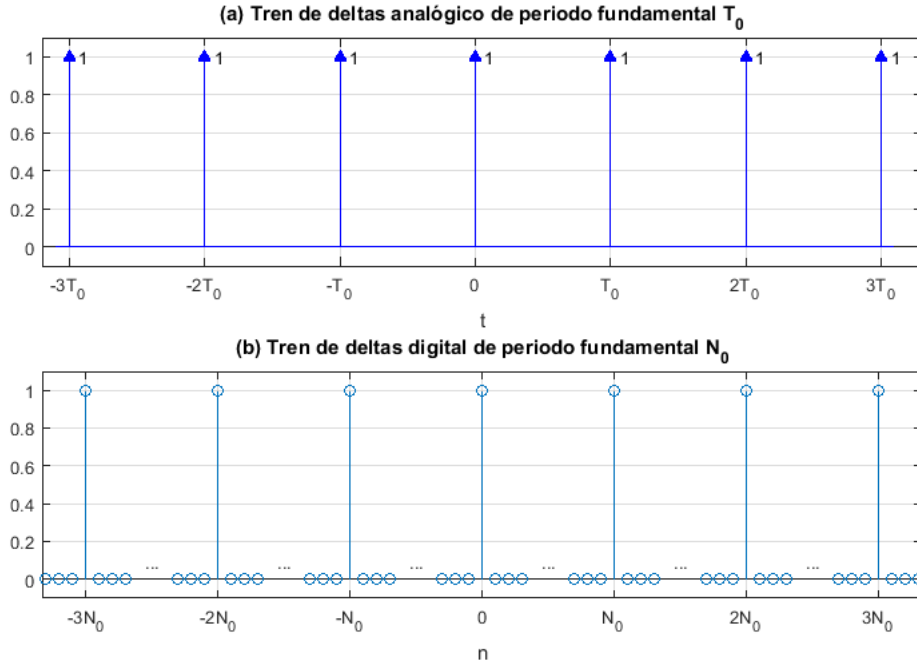


Figura 1. Representación gráfica de los trenes de deltas definidos en (49) y (50).

Entonces, como consecuencia de la propiedad distributiva de la convolución y de (47)-(48), se puede afirmar lo siguiente:

Toda señal periódica puede ser expresada como el resultado de la convolución de su periodo básico con un tren de deltas de su mismo periodo fundamental (ver Demostración 7):

$$x(t) = x_0(t) * \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(t - mT_0) \quad (51)$$

$$x[n] = x_0[n] * \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta[n - mN_0] \quad (52)$$

siendo $x(t)$ una señal periódica analógica cualquiera de periodo fundamental T_0 y $x_0(t)$ su periodo básico, y siendo $x[n]$ una señal periódica digital cualquiera de periodo fundamental N_0 y $x_0[n]$ su periodo básico.

Demostración 7

Empezamos demostrando el caso analógico. Sean $x(t)$ una señal periódica analógica cualquiera de periodo fundamental T_0 y $x_0(t)$ su periodo básico. Sabemos que $x(t)$ puede expresarse como el resultado de la extensión periódica de $x_0(t)$ a razón de T_0 segundos por periodo:

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_0(t - mT_0) \quad (53)$$

Tomando ahora la ecuación (51):

$$x_0(t) * \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(t - mT_0) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_0(t) * \delta(t - mT_0) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_0(t - mT_0) = x(t) \quad (54)$$

Demostramos ahora el caso digital. Sean $x[n]$ una señal periódica analógica cualquiera de periodo fundamental N_0 y $x_0[n]$ su periodo básico. Sabemos que $x[n]$ puede expresarse como el resultado de la extensión periódica de $x_0[n]$ a razón de N_0 muestras por periodo:

$$x[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_0[n - mN_0] \quad (55)$$

Tomando ahora la ecuación (52):

$$x_0[n] * \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta[n - mN_0] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_0[n] * \delta[n - mN_0] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_0[n - mN_0] = x[n] \quad (56)$$

1.3. Cálculo de la convolución

Pasamos a ocuparnos ahora de cómo calcular en la práctica la convolución entre dos señales. De entrada, conviene tener siempre por la mano las propiedades de la operación convolución estudiadas en el apartado anterior, pues suele ser habitual que se presente la ocasión de aplicarlas a fin de simplificar el proceso de cálculo o, incluso, de aprovechar resultados de convoluciones ya previamente calculadas para calcular más fácilmente convoluciones nuevas.

Dicho esto, si nos fijamos en las ecuaciones (17) y (18), vemos que el cálculo de la convolución implica resolver una operación entre dos señales de modo tal que:

- Una de las señales ($x_i(\tau)$, $x_i[m]$) se mantiene «fijada» durante todo el cálculo.
- La otra señal ($x_i(t - \tau)$, $x_i[n - m]$) es sometida a una reflexión horizontal (tal y como indica el cambio de signo aplicado en τ y m) y desplazada horizontalmente mediante la variable t , en el caso analógico, o n , en el caso digital.

Dicho de otro modo: la operación convolución da lugar a una señal ($y(t) = x_1(t) * x_2(t)$, $y[n] = x_1[n] * x_2[n]$) cuya variable independiente (t , n) es el desplazamiento horizontal al que está sometida la segunda señal involucrada en el cálculo. Así, si quisiéramos calcular el valor de amplitud de la señal resultante de la convolución en un instante dado ($y(t_0)$, $y[n_0]$), solo tendríamos que particularizar el cálculo de la convolución sometiendo a la segunda señal involucrada en el cálculo a ese desplazamiento horizontal en concreto ($t = t_0$, $n = n_0$):

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau \Rightarrow y(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau)x_2(t_0-\tau)d\tau, \forall t_0 \in \mathbb{R} \quad (57)$$

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_1[m]x_2[n-m] \Rightarrow y[n_0] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_1[m]x_2[n_0-m], \forall n_0 \in \mathbb{Z} \quad (58)$$

Por tanto, calcular la convolución en su totalidad es calcular el resultado de la operación para cualquier valor de t o n (obteniendo, así, $y(t)$ o $y[n]$). Es, pues, en este sentido, que la primera señal involucrada en la convolución queda «fijada» durante todo el cálculo, mientras que la segunda es desplazada de modo tal que su desplazamiento abarca todos los valores posibles que puede adoptar la variable independiente de la señal resultante de la convolución ($t \in (-\infty, +\infty)$, $n \in \{-\infty, +\infty\}$). Esto se ve muy claramente en términos gráficos:

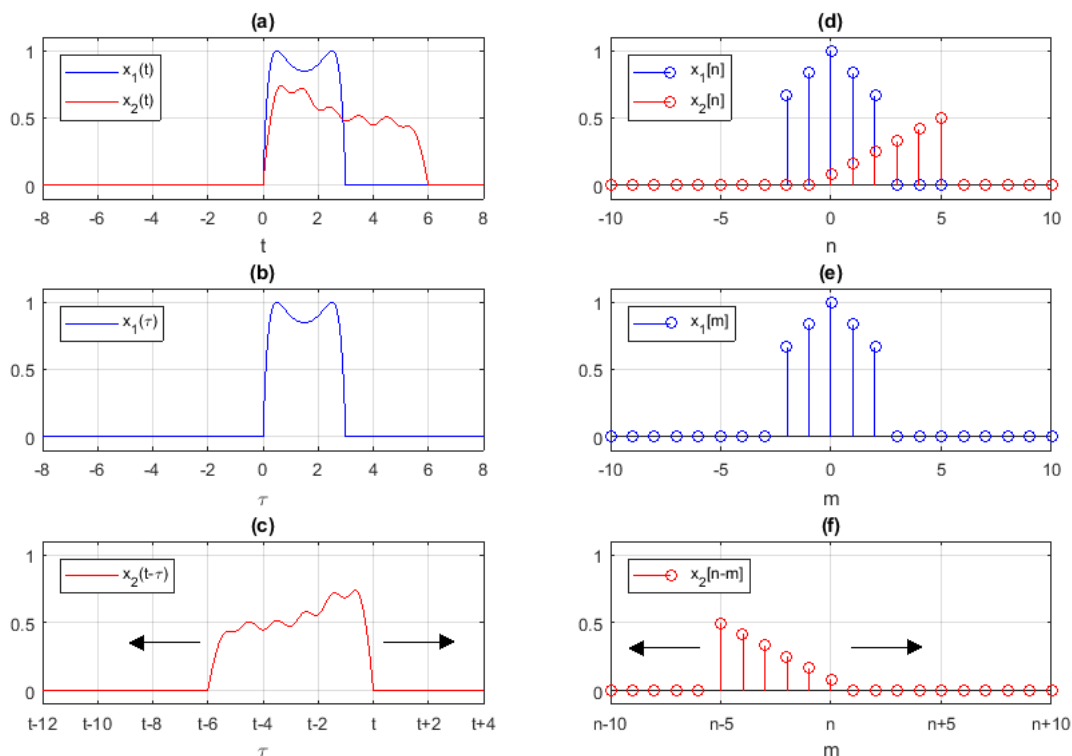


Figura 2. Representación gráfica de las señales implicadas en el cálculo de la convolución. (a)(d) Señales originales (para esta representación se han usado, a modo de ejemplo, señales arbitrarias de longitud finita). (b)(e) La primera señal queda «fijada» durante todo el cálculo. (c)(f) La segunda señal es «girada» (sometida a una reflexión horizontal) y desplazada horizontalmente según t o n .

Los ejemplos con señales arbitrarias de la Figura 2 ilustran bien que, en función del desplazamiento al que esté sometida la segunda señal (esto es, en función del valor de t o n), el grado de solapamiento entre ambas señales puede variar ostensiblemente: las dos señales pueden estar totalmente solapadas, parcialmente solapadas, o no estar solapadas.

Un símil nemotécnico que puede servir para entender mejor esto es el del túnel de lavado de coches: el coche (la señal que se desplaza) avanzando hacia el túnel del lavado (la señal «fijada») y estando aún totalmente fuera (solapamiento nulo), el coche entrando en el túnel (solapamiento parcial), el coche avanzando dentro del túnel (solapamiento total), el coche saliendo del túnel (solapamiento parcial), y el coche ya fuera del túnel (solapamiento nulo).

Así pues, dado que, en la integral o el sumatorio de convolución, según sea el caso, ambas señales están multiplicándose, todo este procedimiento nos lleva a implementar el **cálculo de la convolución por tramos**, donde **cada tramo vendrá definido por un cierto intervalo de valores de la variable independiente (t o n) en función del grado de solapamiento que se dé para ese intervalo de valores**.

Por tanto, **la señal resultante de la convolución será una señal definida por intervalos**:

- En los intervalos correspondientes a tramos con solapamiento total o parcial, será igual al resultado del cálculo definido según cómo hayan quedado solapadas las señales (que, recordemos, están multiplicándose entre sí) en ese intervalo.
- En los intervalos correspondientes a tramos con solapamiento nulo, será igual a 0.

Llegados a este punto, el procedimiento de cálculo de la convolución ya está totalmente descrito. Ahora, y debido a que los patrones de solapamiento varían dependiendo del caso en que nos encontremos, vamos a distinguir **tres casos distintos de cálculo de la convolución, en función de la longitud de las señales implicadas en el cálculo**:

- Convolución de dos señales de longitud finita (como, de hecho, en los ejemplos ilustrados en la Figura 2).
- Convolución donde al menos una señal es infinita orientada a un lado (ya sea a la izquierda o a la derecha) y la otra señal no es infinita orientada a ambos lados.
- Convolución donde al menos una señal es infinita orientada a ambos lados.

En los tres subapartados siguientes, cada uno de estos tres casos es descrito detalladamente e ilustrado con ejemplos concretos.

1.3.1. Convolución de dos señales finitas

Sea el cálculo de la convolución de dos señales cualesquiera de longitud finita:

$$y(t) = x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau \quad \begin{cases} x_1(t) = 0, \forall t \notin [t_{1i}, t_{1f}] \\ x_2(t) = 0, \forall t \notin [t_{2i}, t_{2f}] \end{cases} \quad (59)$$

$$y[n] = x_1[n] * x_2[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_1[m]x_2[n-m] \quad \begin{cases} x_1[n] = 0, \forall n \notin \{n_{1i}, \dots, n_{1f}\} \\ x_2[n] = 0, \forall n \notin \{n_{2i}, \dots, n_{2f}\} \end{cases} \quad (60)$$

allí donde t_{ji} y t_{jf} son los instantes inicial y final, respectivamente, de la señal $x_j(t)$, y donde n_{ji} y n_{jf} son las muestras inicial y final, respectivamente, de la señal $x_j[n]$, cumpliéndose siempre que $t_{jf} \geq t_{ji}$ y $n_{jf} \geq n_{ji}$, siendo $t_{ji}, t_{jf} \in \mathbb{R}$ y $n_{ji}, n_{jf} \in \mathbb{Z}$.

Por tanto, $x_j(t)$ es una señal analógica finita de duración $T_j = t_{jf} - t_{ji}$ segundos, y $x_j[n]$ es una señal digital finita de duración $N_j = n_{jf} - n_{ji} + 1$ muestras.

Entonces, al representar gráficamente las señales involucradas en el cálculo de la convolución ($x_1(\tau)$ y $x_2(t-\tau)$, y $x_1[m]$ y $x_2[n-m]$), podemos ver cómo **la convolución de dos señales finitas cualesquiera queda definida en cinco tramos**, en función del solapamiento entre ambas señales debido al desplazamiento de la segunda:

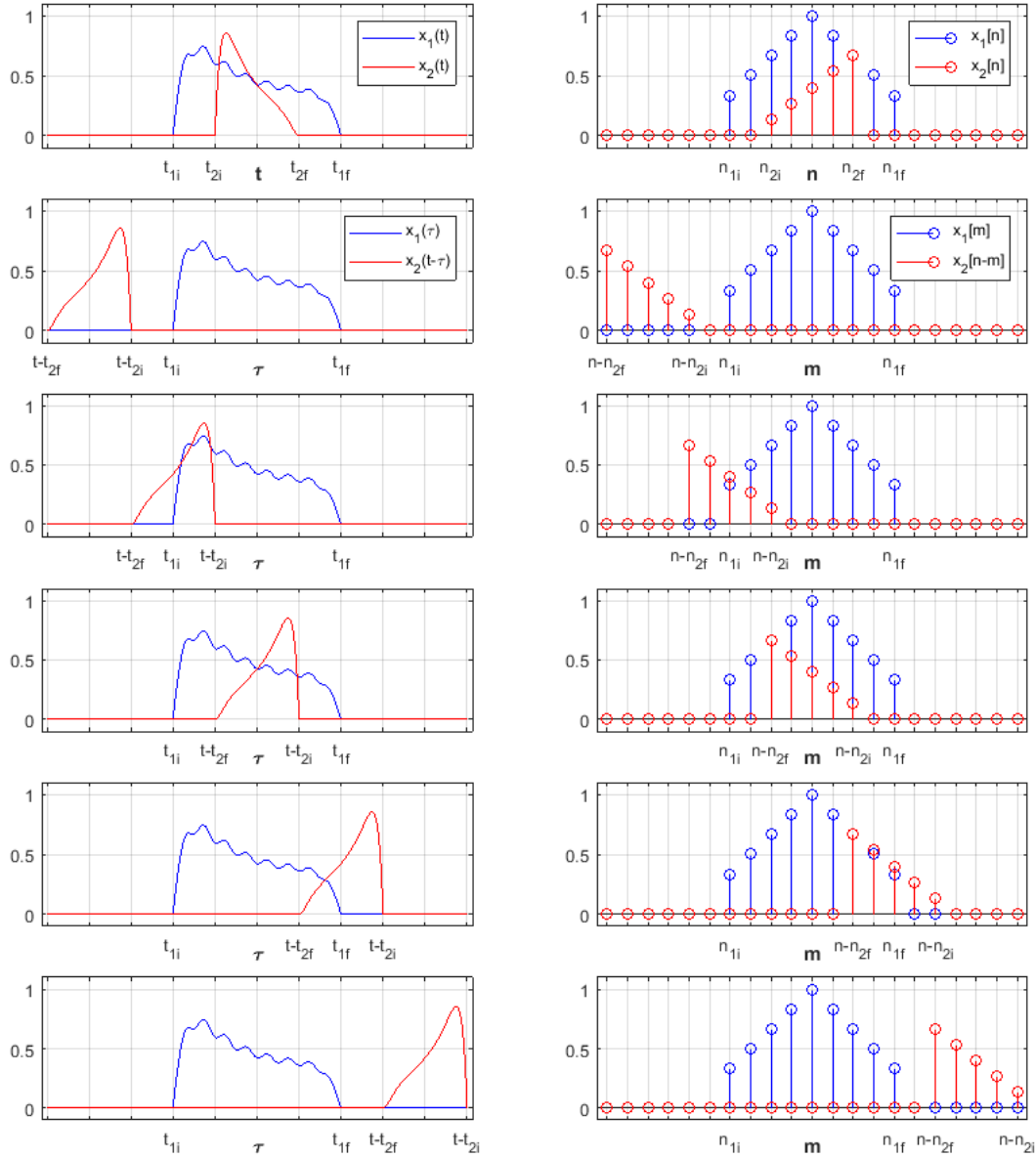


Figura 3. Definición en cinco tramos de la convolución de dos señales cualesquiera de longitud finita. En las dos primeras gráficas de cada columna aparecen representadas las señales originales que participan en la convolución ($x_1(t)$ y $x_2(t)$, o $x_1[n]$ y $x_2[n]$). Cada una de las cinco gráficas siguientes de cada columna representa uno de los cinco tramos de la convolución, cada uno de ellos definido por un cambio en el patrón de solapamiento entre $x_1(\tau)$ y $x_2(t-\tau)$, o $x_1[m]$ y $x_2[n-m]$: solapamiento nulo, solapamiento parcial, solapamiento total, solapamiento parcial y solapamiento nulo.

Por tanto, la señal resultante de la convolución de dos señales finitas se define como sigue:

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t - t_{2i} < t_{1i} \\ \int_{t_{1i}}^{t-t_{2i}} x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau & \text{para } t - t_{2f} < t_{1i} \leq t - t_{2i} \\ \int_{t-t_{2f}}^{t-t_{2i}} x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau & \text{para } t_{1i} \leq t - t_{2f} \text{ y } t - t_{2i} \leq t_{1f} \\ \int_{t-t_{2f}}^{t_{1f}} x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau & \text{para } t - t_{2f} \leq t_{1f} < t - t_{2i} \\ 0 & \text{para } t - t_{2f} > t_{1f} \end{cases} \quad (61)$$

$$y[n] = \begin{cases} 0 & \text{para } n - n_{2i} < n_{1i} \\ \sum_{m=n_{1i}}^{n-n_{2i}} x_1[m]x_2[n-m] & \text{para } n - n_{2f} < n_{1i} \leq n - n_{2i} \\ \sum_{m=n-n_{2f}}^{n-n_{2i}} x_1[m]x_2[n-m] & \text{para } n_{1i} \leq n - n_{2f} \text{ y } n - n_{2i} \leq n_{1f} \\ \sum_{m=n-n_{2f}}^{n_{1f}} x_1[m]x_2[n-m] & \text{para } n - n_{2f} \leq n_{1f} < n - n_{2i} \\ 0 & \text{para } n - n_{2f} > n_{1f} \end{cases} \quad (62)$$

Y, si dejamos los límites de los tramos definidos explícitamente como intervalos de valores de la variable independiente, obtenemos lo siguiente:

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < t_{1i} + t_{2i} \\ \int_{t_{1i}}^{t-t_{2i}} x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau & \text{para } t \in [t_{1i} + t_{2i}, t_{1i} + t_{2f}] \\ \int_{t-t_{2f}}^{t-t_{2i}} x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau & \text{para } t \in [t_{1i} + t_{2f}, t_{1f} + t_{2i}] \\ \int_{t-t_{2f}}^{t_{1f}} x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau & \text{para } t \in (t_{1f} + t_{2i}, t_{1f} + t_{2f}] \\ 0 & \text{para } t > t_{1f} + t_{2f} \end{cases} \quad (63)$$

$$y[n] = \begin{cases} 0 & \text{para } n < n_{1i} + n_{2i} \\ \sum_{m=n_{1i}}^{n-n_{2i}} x_1[m]x_2[n-m] & \text{para } n \in \{n_{1i} + n_{2i}, \dots, n_{1i} + n_{2f} - 1\} \\ \sum_{m=n-n_{2f}}^{n-n_{2i}} x_1[m]x_2[n-m] & \text{para } n \in \{n_{1i} + n_{2f}, \dots, n_{1f} + n_{2i}\} \\ \sum_{m=n-n_{2f}}^{n_{1f}} x_1[m]x_2[n-m] & \text{para } n \in \{n_{1f} + n_{2i} + 1, \dots, n_{1f} + n_{2f}\} \\ 0 & \text{para } n > n_{1f} + n_{2f} \end{cases} \quad (64)$$

Una cuestión importante es la de **la longitud de la señal resultante de la convolución**. En el caso de la convolución de dos señales finitas, la señal resultante también es una señal finita: esto se ve muy claramente en (63) y (64), donde $y(t)$ y $y[n]$ son iguales a 0 en sus intervalos primero y último. De hecho, de estas ecuaciones se sigue inmediatamente que:

$$y(t) = 0, \forall t \notin [t_{1i} + t_{2i}, t_{1f} + t_{2f}] \Rightarrow y(t) = 0, \forall t \notin [t_i, t_f] \quad (65)$$

$$y[n] = 0, \forall n \notin \{n_{1i} + n_{2i}, \dots, n_{1f} + n_{2f}\} \Rightarrow y[n] = 0, \forall n \notin \{n_i, \dots, n_f\} \quad (66)$$

siendo $t_i = t_{1i} + t_{2i}$ y $t_f = t_{1f} + t_{2f}$ los instantes inicial y final, respectivamente, de $y(t)$, y $n_i = n_{1i} + n_{2i}$ y $n_f = n_{1f} + n_{2f}$ las muestras inicial y final, respectivamente, de $y[n]$.

Así, se observa que $y(t)$ e $y[n]$ son señales finitas, cuyas respectivas duraciones son T y N :

- $T = t_f - t_i = \underbrace{(t_{1f} - t_{1i})}_{T_1} + \underbrace{(t_{2f} - t_{2i})}_{T_2} = T_1 + T_2$ segundos.
- $N = n_f - n_i + 1 = \underbrace{(n_{1f} - n_{1i})}_{N_1 - 1} + \underbrace{(n_{2f} - n_{2i})}_{N_2 - 1} + 1 = N_1 + N_2 - 1$ muestras.

Por tanto, se puede concluir el siguiente resultado general:

Sean dos señales analógicas finitas $x_1(t)$ y $x_2(t)$ de T_1 y T_2 segundos de duración, respectivamente. **El resultado de la convolución de $x_1(t)$ y $x_2(t)$ es una señal analógica finita $y(t)$ de duración $T = T_1 + T_2$ segundos de duración.**

Sean dos señales digitales finitas $x_1[n]$ y $x_2[n]$ de N_1 y N_2 muestras de duración, respectivamente. **El resultado de la convolución de $x_1[n]$ y $x_2[n]$ es una señal digital finita $y[n]$ de $N = N_1 + N_2 - 1$ muestras de duración.**

Otra observación interesante, respecto de la Figura 3, es que, aunque se ha establecido que la señal «fijada» en el cálculo de la convolución sea la señal más larga, ello no implica pérdida de generalidad, ya que la convolución posee la propiedad conmutativa: **intercambiar las señales implicadas en el cálculo no afecta al resultado**. Por tanto, haber establecido esto al revés (es decir, haber establecido que la señal «fijada» fuese la señal más corta) no habría modificado en nada todo lo expuesto hasta aquí: el resultado obtenido habría sido exactamente el mismo.

Por otra parte, es importante notar que, **en el caso particular en que ambas señales sean de la misma longitud ($T_1 = T_2$, $N_1 = N_2$), el tramo central desaparece y la señal resultante de la convolución queda definida en cuatro intervalos**, con una ligera modificación en el límite final del segundo intervalo respecto de (63) y (64):

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < t_{1i} + t_{2i} \\ \int_{t_{1i}}^{t-t_{2i}} x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau & \text{para } t \in [t_{1i} + t_{2i}, t_{1i} + t_{2f}] \\ \int_{t-t_{2f}}^{t_{1f}} x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau & \text{para } t \in (t_{1f} + t_{2i}, t_{1f} + t_{2f}] \\ 0 & \text{para } t > t_{1f} + t_{2f} \end{cases} \quad (67)$$

$$y[n] = \begin{cases} 0 & \text{para } n < n_{1i} + n_{2i} \\ \sum_{m=n_{1i}}^{n-n_{2i}} x_1[m]x_2[n-m] & \text{para } n \in \{n_{1i} + n_{2i}, \dots, n_{1i} + n_{2f}\} \\ \sum_{m=n-n_{2f}}^{n_{1f}} x_1[m]x_2[n-m] & \text{para } n \in \{n_{1f} + n_{2i} + 1, \dots, n_{1f} + n_{2f}\} \\ 0 & \text{para } n > n_{1f} + n_{2f} \end{cases} \quad (68)$$

Finalmente, se propone un ejercicio de cálculo de la convolución de señales finitas:

Ejemplo 1

Se pide calcular las siguiente convoluciones y representar gráficamente los resultados:

$$y_1(t) = \Pi\left(\frac{t}{T}\right) * \Pi\left(\frac{t}{T}\right) \quad (69)$$

$$y_2(t) = \left(A_1 \Pi\left(\frac{t-t_1}{T_1}\right)\right) * \left(A_2 \Pi\left(\frac{t+t_2}{T_2}\right)\right) \quad (70)$$

$$y_3[n] = (u[n] - u[n - N_1]) * (u[n] - u[n - N_2]) \quad (71)$$

$$y_4[n] = (A_1(u[n - n_1] - u[n - n_1 - N])) * (A_2(u[n - n_2] - u[n - n_2 - N])) \quad (72)$$

allí donde $A_1, A_2, T, T_1, T_2, t_1$ y t_2 son constantes reales ($A_1, A_2, T, T_1, T_2, t_1, t_2 \in \mathbb{R}$), con $T_1 > T_2$; y donde N, N_1, N_2, n_1 y n_2 son constantes enteras ($N, N_1, N_2, n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$), con $N_1 > N_2$.

Solución

a) Las señales implicadas en la primera convolución son la misma señal analógica finita $x(t)$:

$$y_1(t) = x(t) * x(t) = \Pi\left(\frac{t}{T}\right) * \Pi\left(\frac{t}{T}\right) \quad (73)$$

allí donde $x(t)$ es una señal pulso cuadrado de amplitud 1, longitud T y centrada en $t = 0$:

$$x(t) = \Pi\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1 & \text{para } t \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right] \\ 0 & \text{para } t \notin \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right] \end{cases} \quad (74)$$

Planteando la convolución por tramos definida en la Figura 3, vemos que, de acuerdo con la ecuación (67), **el resultado de la convolución es una señal finita de longitud $2T$** que queda definida en los cuatro intervalos siguientes:

$$y_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < -T \\ \int_{-T/2}^{t+T/2} x(\tau)x(t-\tau)d\tau & \text{para } t \in [-T, 0] \\ \int_{t-T/2}^{T/2} x(\tau)x(t-\tau)d\tau & \text{para } t \in (0, T] \\ 0 & \text{para } t > T \end{cases} \quad (75)$$

Puesto que la amplitud de $x(t)$ es constante y de valor 1, vemos que $x(\tau)x(t-\tau) = 1$ en los tramos con solapamiento, de modo que:

$$y_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < -T \\ \int_{-T/2}^{t+T/2} d\tau & \text{para } t \in [-T, 0] \\ \int_{t-T/2}^{T/2} d\tau & \text{para } t \in (0, T] \\ 0 & \text{para } t > T \end{cases} \quad (76)$$

Resolvemos las integrales de los tramos segundo y tercero de la convolución:

$$\int_{-T/2}^{t+T/2} d\tau = [\tau]_{-T/2}^{t+T/2} = t + \frac{T}{2} - \left(-\frac{T}{2}\right) = t + T \quad (77)$$

$$\int_{t-T/2}^{T/2} d\tau = [\tau]_{t-T/2}^{T/2} = \frac{T}{2} - \left(t - \frac{T}{2}\right) = T - t \quad (78)$$

Y, así, obtenemos el resultado definitivo de la convolución:

$$y_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < -T \\ t + T & \text{para } t \in [-T, 0] \\ T - t & \text{para } t \in (0, T] \\ 0 & \text{para } t > T \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{para } t < -T \\ T - |t| & \text{para } t \in [-T, T] \\ 0 & \text{para } t > T \end{cases} \quad (79)$$

Vemos que $y_1(t)$ es una **señal pulso triangular de amplitud T , longitud $2T$ y centrada en $t = 0$** :

$$\Pi\left(\frac{t}{T}\right) * \Pi\left(\frac{t}{T}\right) = T\Lambda\left(\frac{t}{2T}\right) \quad (80)$$

Comprobamos el resultado obtenido con MATLAB y representamos gráficamente las señales:

```
>> syms x(t) y1(t) T tau;
>> int(1,tau,-T/2,t+(T/2)) % Integral del segundo tramo

ans =

T + t

>> int(1,tau,t-T/2,T/2) % Integral del tercer tramo

ans =

T - t

>> T = 2; % Fijamos arbitrariamente T=2 para la representación gráfica
>> x(t) = piecewise(t<(-T/2),0, (-T/2)<=t<=(T/2),1,t>(T/2),0);
>> y1(t) = piecewise(t<-T,0,-T<=t<=0,T+t,0<t<=T,T-t,t>T,0);
>> figure;
>> fplot(x(t),[-2*T,2*T]); % Representamos x(t)
>> hold on;
>> fplot(y1(t),[-2*T,2*T]); % Representamos y1(t)
>> axis([-2*T 2*T -0.01 1.1*T]);
>> grid on;
>> xlabel('t');
>> legend({'x(t)', 'y_1(t)=x(t)*x(t)'}, 'Location', 'northwest');
```

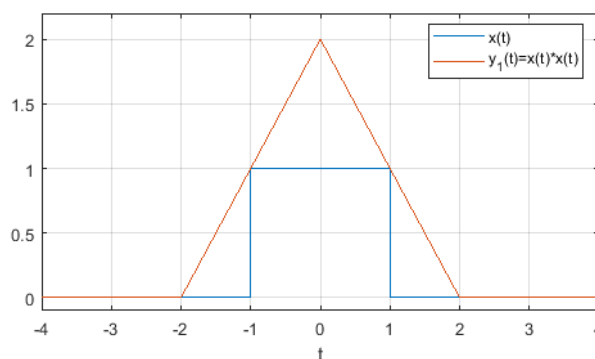


Figura 4. Representación gráfica de $x(t)$ e $y_1(t)$, con $T = 2$.

b) Las señales implicadas en la segunda convolución son dos pulsos cuadrados escalados en amplitud y desplazados horizontalmente. Aprovecharemos este hecho para simplificar el cálculo de la convolución, de acuerdo con la ecuación (45):

$$y_2(t) = \underbrace{\left(A_1 \Pi \left(\frac{t-t_1}{T_1} \right) \right)}_{x_1(t)=A_1 x'_1(t-t_1)} * \underbrace{\left(A_2 \Pi \left(\frac{t+t_2}{T_2} \right) \right)}_{x_2(t)=A_2 x'_2(t+t_2)} \Rightarrow y_2(t) = A y'_2(t+t_0) \quad (81)$$

siendo $A = A_1 A_2$ y $t_0 = -t_1 + t_2$, y allí donde:

$$y'_2(t) = x'_1(t) * x'_2(t) = \Pi \left(\frac{t}{T_1} \right) * \Pi \left(\frac{t}{T_2} \right) \quad (82)$$

Por tanto, cada $x_i(t)$ es una señal pulso cuadrado de amplitud 1, longitud T_i y centrada en $t = 0$:

$$x'_1(t) = \Pi \left(\frac{t}{T_1} \right) = \begin{cases} 1 & \text{para } t \in \left[-\frac{T_1}{2}, \frac{T_1}{2} \right] \\ 0 & \text{para } t \notin \left[-\frac{T_1}{2}, \frac{T_1}{2} \right] \end{cases} \quad (83)$$

$$x'_2(t) = \Pi \left(\frac{t}{T_2} \right) = \begin{cases} 1 & \text{para } t \in \left[-\frac{T_2}{2}, \frac{T_2}{2} \right] \\ 0 & \text{para } t \notin \left[-\frac{T_2}{2}, \frac{T_2}{2} \right] \end{cases} \quad (84)$$

Planteamos la convolución por tramos, según la Figura 3 y de acuerdo con (63), ya que $T_1 > T_2$. Así, **el resultado de la convolución es una señal finita de longitud $T_1 + T_2$** , la cual, dado que $x'_1(\tau)x'_2(t-\tau) = 1$ en los tramos con solapamiento, queda definida en cinco intervalos:

$$y'_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < \frac{-T_1 - T_2}{2} \\ \int_{-T_1/2}^{t+T_2/2} d\tau & \text{para } t \in \left[\frac{-T_1 - T_2}{2}, \frac{-T_1 + T_2}{2} \right) \\ \int_{t-T_2/2}^{t+T_2/2} d\tau & \text{para } t \in \left[\frac{-T_1 + T_2}{2}, \frac{T_1 - T_2}{2} \right] \\ \int_{t-T_2/2}^{T_1/2} d\tau & \text{para } t \in \left(\frac{T_1 - T_2}{2}, \frac{T_1 + T_2}{2} \right] \\ 0 & \text{para } t > \frac{T_1 + T_2}{2} \end{cases} \quad (85)$$

Resolvemos las integrales de los tramos segundo, tercero y cuarto de la convolución:

$$\int_{-T_1/2}^{t+T_2/2} d\tau = [\tau]_{-T_1/2}^{t+T_2/2} = t + \frac{T_2}{2} - \left(-\frac{T_1}{2} \right) = t + \frac{T_1 + T_2}{2} \quad (86)$$

$$\int_{t-T_2/2}^{t+T_2/2} d\tau = [\tau]_{t-T_2/2}^{t+T_2/2} = t + \frac{T_2}{2} - \left(t - \frac{T_2}{2} \right) = T_2 \quad (87)$$

$$\int_{t-T_2/2}^{T_1/2} d\tau = [\tau]_{t-T_2/2}^{T_1/2} = \frac{T_1}{2} - \left(t - \frac{T_2}{2} \right) = \frac{T_1 + T_2}{2} - t \quad (88)$$

Así, obtenemos el resultado de esta convolución:

$$y'_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < \frac{-T_1 - T_2}{2} \\ t + \frac{T_1 + T_2}{2} & \text{para } t \in \left[\frac{-T_1 - T_2}{2}, \frac{-T_1 + T_2}{2} \right) \\ T_2 & \text{para } t \in \left[\frac{-T_1 + T_2}{2}, \frac{T_1 - T_2}{2} \right] \\ \frac{T_1 + T_2}{2} - t & \text{para } t \in \left(\frac{T_1 - T_2}{2}, \frac{T_1 + T_2}{2} \right] \\ 0 & \text{para } t > \frac{T_1 + T_2}{2} \end{cases} \quad (89)$$

Y, finalmente, tal y como se indica en (81), aplicamos los factores de escala ($A = A_1 A_2$) y los desplazamientos horizontales ($t_0 = -t_1 + t_2$) sobre el resultado de esta convolución:

$$y_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < \frac{-T_1 - T_2}{2} - t_0 \\ A \left(t + \frac{T_1 + T_2}{2} + t_0 \right) & \text{para } t \in \left[\frac{-T_1 - T_2}{2} - t_0, \frac{-T_1 + T_2}{2} - t_0 \right) \\ AT_2 & \text{para } t \in \left[\frac{-T_1 + T_2}{2} - t_0, \frac{T_1 - T_2}{2} - t_0 \right] \\ A \left(\frac{T_1 + T_2}{2} - t_0 - t \right) & \text{para } t \in \left(\frac{T_1 - T_2}{2} - t_0, \frac{T_1 + T_2}{2} - t_0 \right] \\ 0 & \text{para } t > \frac{T_1 + T_2}{2} - t_0 \end{cases} \quad (90)$$

Vemos que $y_2(t)$ es una señal finita de duración $T_1 + T_2$ cuya amplitud crece linealmente desde 0 a partir de $t = (-T_1 - T_2)/2 - t_0$ y hasta alcanzar el valor AT_2 en $t = (-T_1 + T_2)/2 - t_0$, se mantiene en AT_2 hasta $t = (T_1 - T_2)/2 - t_0$, y decrece linealmente hasta volver a valer 0 en $t = (T_1 + T_2)/2 - t_0$ (ver la Figura 5 para más detalles).

Comprobamos el resultado obtenido con MATLAB y representamos gráficamente las señales:

```
>> syms x1(t) x2(t) y2(t) T1 T2 tau;
>> int(1,tau,-T1/2,t+(T2/2)) % Integral del segundo tramo

ans =

T1/2 + T2/2 + t

>> int(1,tau,t-(T2/2),t+(T2/2)) % Integral del tercer tramo

ans =

T2

>> int(1,tau,t-(T2/2),T1/2) % Integral del cuarto tramo

ans =

T1/2 + T2/2 - t

>> T1 = 4; % Fijamos arbitrariamente T1=4 para la representación gráfica
>> T2 = 2; % Fijamos arbitrariamente T1=2 para la representación gráfica
>> t1 = 1; % Fijamos arbitrariamente t1=1 para la representación gráfica
>> t2 = 3; % Fijamos arbitrariamente t2=3 para la representación gráfica
>> A1 = 2/3; % Fijamos arbitrariamente A1=2/3 para la representación gráfica
>> A2 = 1/4; % Fijamos arbitrariamente A2=1/4 para la representación gráfica
>> x1(t) = piecewise(t<(-T1/2)+t1,0,...
(-T1/2)+t1<=t<=(T1/2)+t1,A1, t>(T1/2)+t1,0);
```

```
>> x2(t) = piecewise(t<(-T2/2)-t2,0,...
                    (-T2/2)-t2<=t<=(T2/2)-t2,A2, t>(T2/2)-t2,0);
>> A = A1*A2;
>> t0 = -t1+t2;
>> y2(t) = piecewise(t<((-T1-T2)/2)-t0,0,...
                    ((-T1-T2)/2)-t0<=t<((-T1+T2)/2)-t0,A*(t+((T1+T2)/2)+t0),...
                    ((-T1+T2)/2)-t0<=t<=((T1-T2)/2)-t0,A*T2,...
                    ((T1-T2)/2)-t0<=t<=((T1+T2)/2)-t0,A*((T1+T2)/2)-t0-t,...
                    t>((T1+T2)/2)-t0,0);
>> figure;
>> fplot(x1(t),[-6,6]); % Representamos x1(t)
>> hold on;
>> fplot(x2(t),[-6,6]); % Representamos x2(t)
>> fplot(y1(t),[-6,6]); % Representamos y2(t)
>> axis([-6 6 -0.1 0.71]);
>> grid on;
>> xlabel('t');
>> legend({'x_1(t)','x_2(t)','y_2(t)=x_1(t)*x_2(t)'},'Location','best');
```

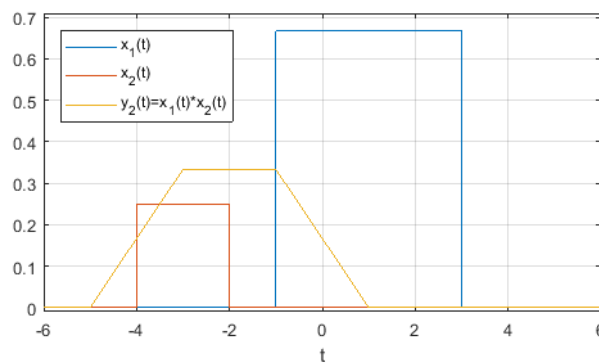


Figura 5. Gráficas de $x_1(t)$, $x_2(t)$ e $y_2(t)$, con $T_1 = 4$, $T_2 = 2$, $t_1 = 1$, $t_2 = 3$, $A_1 = 2/3$ y $A_2 = 1/4$.

c) Las señales implicadas en la tercera convolución son dos señales digital finitas de distinta duración (la primera es de mayor duración que la segunda, puesto que $N_1 > N_2$):

$$y_3[n] = x_1[n] * x_2[n] = (u[n] - u[n - N_1]) * (u[n] - u[n - N_2]) \quad (91)$$

allí donde $x_i[n]$ es un pulso cuadrado digital de amplitud 1 y longitud N_i :

$$x_1[n] = u[n] - u[n - N_1] = \begin{cases} 1 & \text{para } n \in \{0, \dots, N_1 - 1\} \\ 0 & \text{para } n \notin \{0, \dots, N_1 - 1\} \end{cases} \quad (92)$$

$$x_2[n] = u[n] - u[n - N_2] = \begin{cases} 1 & \text{para } n \in \{0, \dots, N_2 - 1\} \\ 0 & \text{para } n \notin \{0, \dots, N_2 - 1\} \end{cases} \quad (93)$$

Planteando la convolución por tramos definida en la Figura 3, vemos que, de acuerdo con la ecuación (64), **el resultado de la convolución es una señal finita de longitud $N_1 + N_2 - 1$** que queda definida en los cinco intervalos siguientes:

$$y_3[n] = \begin{cases} 0 & \text{para } n < 0 \\ \sum_{m=0}^n x_1[m]x_2[n-m] & \text{para } n \in \{0, \dots, N_2 - 2\} \\ \sum_{m=n-N_2+1}^n x_1[m]x_2[n-m] & \text{para } n \in \{N_2 - 1, \dots, N_1 - 1\} \\ \sum_{m=n-N_2+1}^{N_1-1} x_1[m]x_2[n-m] & \text{para } n \in \{N_1, \dots, N_1 + N_2 - 2\} \\ 0 & \text{para } n > N_1 + N_2 - 2 \end{cases} \quad (94)$$

Debido a que las amplitudes de $x_1[n]$ y $x_2[n]$ son constantes y de valor 1, se observa que $x_1[m]x_2[n-m] = 1$ en los tramos con solapamiento, de modo que:

$$y_3[n] = \begin{cases} 0 & \text{para } n < 0 \\ \sum_{m=0}^n 1 & \text{para } n \in \{0, \dots, N_2 - 2\} \\ \sum_{m=n-N_2+1}^n 1 & \text{para } n \in \{N_2 - 1, \dots, N_1 - 1\} \\ \sum_{m=n-N_2+1}^{N_1-1} 1 & \text{para } n \in \{N_1, \dots, N_1 + N_2 - 2\} \\ 0 & \text{para } n > N_1 + N_2 - 2 \end{cases} \quad (95)$$

Resolvemos los sumatorios de los tramos segundo, tercero y cuarto de la convolución (vemos que se trata de tres series aritméticas):

$$\sum_{m=0}^n 1 = (1+1) \frac{n-0+1}{2} = n+1 \quad (96)$$

$$\sum_{m=n-N_2+1}^n 1 = (1+1) \frac{n-(n-N_2+1)+1}{2} = N_2 \quad (97)$$

$$\sum_{m=n-N_2+1}^{N_1-1} 1 = (1+1) \frac{(N_1-1)-(n-N_2+1)+1}{2} = N_1 + N_2 - 1 - n \quad (98)$$

Y, así, obtenemos el resultado definitivo de la convolución:

$$y_3[n] = \begin{cases} 0 & \text{para } n < 0 \\ n+1 & \text{para } n \in \{0, \dots, N_2 - 2\} \\ N_2 & \text{para } n \in \{N_2 - 1, \dots, N_1 - 1\} \\ N_1 + N_2 - 1 - n & \text{para } n \in \{N_1, \dots, N_1 + N_2 - 2\} \\ 0 & \text{para } n > N_1 + N_2 - 2 \end{cases} \quad (99)$$

Vemos que $y_3[n]$ es una señal finita de duración $N_1 + N_2 - 1$ cuya amplitud crece linealmente a partir de $n = 0$ hasta alcanzar el valor N_2 en $n = N_2 - 1$, se mantiene en N_2 hasta $n = N_1 - 1$, y decrece linealmente hasta volver a valer 0 en $n = N_1 + N_2 - 1$ (ver Figura 6 para más detalles).

Comprobamos el resultado obtenido con MATLAB y representamos gráficamente las señales:

```
>> syms n m N1 N2 integer;
>> symsum(1,m,0,n) % Sumatorio del segundo tramo

ans =

n + 1

>> symsum(1,m,n-N2+1,n) % Sumatorio del tercer tramo

ans =

N2

>> symsum(1,m,n-N2+1,N1-1) % Sumatorio del cuarto tramo

ans =
```

$N_1 + N_2 - n - 1$

```
>> N1 = 10; % Fijamos arbitrariamente N1=10 para la representación gráfica
>> N2 = 6; % Fijamos arbitrariamente N2=5 para la representación gráfica
>> n = -5:1:20;
>> x1 = zeros(size(n));
>> nx1 = (n>=0) & (n<=(N1-1)); % El intervalo de muestras en el que x1≠0
>> x1(nx1) = 1;
>> x2 = zeros(size(n));
>> nx2 = (n>=0) & (n<=(N2-1)); % El intervalo de muestras en el que x2≠0
>> x2(nx2) = 1;
>> y3 = zeros(size(n));
>> ny3 = (n>=0) & (n<=(N1+N2-2)); % El intervalo de muestras en el que y3≠0
>> y3(ny3) = conv(x1(nx1),x2(nx2)); % La convolución de x1 y x2
>> figure;
>> subplot(3,1,1);
>> stem(n,x1); % Representamos x1[n]
>> axis([n(1) n(end) -0.1 1.1]);
>> grid on;
>> xlabel('n');
>> legend('x_1[n]', 'Location', 'best');
>> subplot(3,1,2);
>> stem(n,x2); % Representamos x2[n]
>> axis([n(1) n(end) -0.1 1.1]);
>> grid on;
>> xlabel('n');
>> legend('x_2[n]', 'Location', 'best');
>> subplot(3,1,3);
>> stem(n,y3); % Representamos y3[n]
>> axis([n(1) n(end) -0.1*N2 1.1*N2]);
>> grid on;
>> xlabel('n');
>> legend('y_3[n]=x_1[n]*x_2[n]', 'Location', 'best');
```

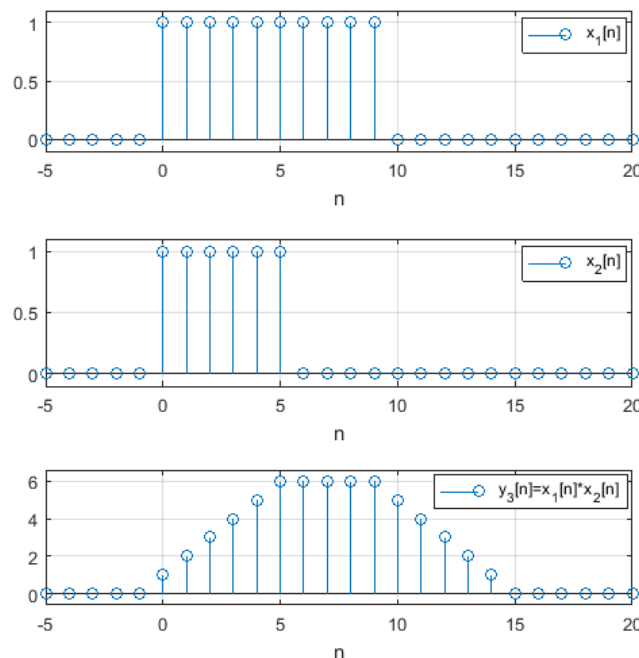


Figura 6. Representación gráfica de $x_1[n]$, $x_2[n]$ e $y_3[n]$, con $N_1 = 10$ y $N_2 = 6$.

Conviene notar que la función `conv` calcula la convolución de dos señales digitales finitas **explicitadas numéricamente**: le pasamos los valores de amplitud correspondientes a los intervalos en los que están definidas las señales finitas involucradas en la convolución ($x_1(n_{x1})$ y $x_2(n_{x2})$) y la función retorna los valores de amplitud de la señal finita resultante de la

convolución correspondientes al intervalo en que dicha señal está definida ($y_3(ny_3)$). Para más detalles, se recomienda consultar el `help` de la función.

d) Se observa que las señales implicadas en la cuarta convolución son versiones escaladas en amplitud y desplazadas horizontalmente de una única señal:

$$y_4[n] = \underbrace{(A_1(u[n - n_1] - u[n - n_1 - N]))}_{x_1[n]=A_1x[n-n_1]} * \underbrace{(A_2(u[n - n_2] - u[n - n_2 - N]))}_{x_2[n]=A_2x[n-n_2]} \quad (100)$$

allí donde $x[n]$ es un pulso cuadrado digital de amplitud 1 y longitud N :

$$x[n] = u[n] - u[n - N] = \begin{cases} 1 & \text{para } n \in \{0, \dots, N - 1\} \\ 0 & \text{para } n \notin \{0, \dots, N - 1\} \end{cases} \quad (101)$$

De modo que:

$$y'_4[n] = x[n] * x[n] \Rightarrow y_4[n] = Ay'_4[n + n_0] \quad (102)$$

siendo $A = A_1A_2$ y $n_0 = -n_1 - n_2$.

Calcular la convolución $y'_4[n] = x[n] * x[n]$, implica, como siempre, operar por tramos tal y como se define en la Figura 3 y, en este caso, puesto que las dos señales implicadas en la convolución son de la misma longitud, definir $y'_4[n]$ por intervalos de acuerdo con (68). Ahora bien, en lugar de eso, lo que vamos a hacer es aprovechar el resultado de la convolución del apartado anterior, particularizándolo para dos pulsos iguales de longitud N .

Por tanto, tomamos la ecuación (99) y la particularizamos para $N_1 = N_2 = N$, obteniendo, así, **una señal finita de longitud $2N - 1$** definida en los cuatro intervalos siguientes (los intervalos segundo y tercero de (99) quedan aquí fusionados en un único intervalo):

$$y'_4[n] = \begin{cases} 0 & \text{para } n < 0 \\ n + 1 & \text{para } n \in \{0, \dots, N - 1\} \\ 2N - 1 - n & \text{para } n \in \{N, \dots, 2N - 2\} \\ 0 & \text{para } n > 2N - 2 \end{cases} \quad (103)$$

Y, así, obtenemos $y_4[n]$ aplicando (103) en (102):

$$y_4[n] = \begin{cases} 0 & \text{para } n < -n_0 \\ A(n + n_0 + 1) & \text{para } n \in \{-n_0, \dots, N - n_0 - 1\} \\ A(2N - 1 - n - n_0) & \text{para } n \in \{N - n_0, \dots, 2N - n_0 - 2\} \\ 0 & \text{para } n > 2N - n_0 - 2 \end{cases} \quad (104)$$

siendo $A = A_1A_2$ y $n_0 = -n_1 - n_2$.

Vemos que $y_4[n]$ es una señal finita de duración $2N - 1$ cuya amplitud crece linealmente a partir de $n = -n_0$ hasta alcanzar el valor AN en $n = N - n_0 - 1$, y de inmediato vuelve a decrecer linealmente hasta volver a valer 0 en $n = 2N - n_0 - 2$ (ver la Figura 7 para más detalles).

Finalmente, comprobamos los resultados representando gráficamente las señales:

```
>> N = 5; % Fijamos arbitrariamente N=5 para la representación gráfica
>> n1 = -5; % Fijamos arbitrariamente n1=-5 para la representación gráfica
>> n2 = 3; % Fijamos arbitrariamente n2=3 para la representación gráfica
>> A1 = 1.5; % Fijamos arbitrariamente A1=1.5 para la representación gráfica
>> A2 = 2; % Fijamos arbitrariamente A2=2 para la representación gráfica

>> n = -10:1:10;
>> x1 = zeros(size(n));
```

```
>> nx1 = (n>=n1)&(n<=(N+n1-1)); % El intervalo de muestras en el que x1≠0
>> x1(nx1) = A1;
>> x2 = zeros(size(n));
>> nx2 = (n>=n2)&(n<=(N+n2-1)); % El intervalo de muestras en el que x2≠0
>> x2(nx2) = A2;
>> y4 = zeros(size(n));
>> n0 = -n1-n2;
>> ny4 = (n>=-n0)&(n<=(2*N-n0-2)); % El intervalo de muestras en el que y4≠0
>> y4(ny4) = conv(x1(nx1),x2(nx2)); % La convolución de x1 y x2
>> figure;
>> subplot(3,1,1);
>> stem(n,x1); % Representamos x1[n]
>> axis([n(1) n(end) -0.1*A1 1.1*A1]);
>> grid on;
>> xlabel('n');
>> legend('x_1[n]', 'Location', 'best');
>> subplot(3,1,2);
>> stem(n,x2); % Representamos x2[n]
>> axis([n(1) n(end) -0.1*A1 1.1*A2]);
>> grid on;
>> xlabel('n');
>> legend('x_2[n]', 'Location', 'best');
>> subplot(3,1,3);
>> stem(n,y4); % Representamos y4[n]
>> axis([n(1) n(end) -0.1*A1*A2*N 1.1*A1*A2*N]);
>> grid on;
>> xlabel('n');
>> legend('y_4[n]=x_1[n]*x_2[n]', 'Location', 'best');
```

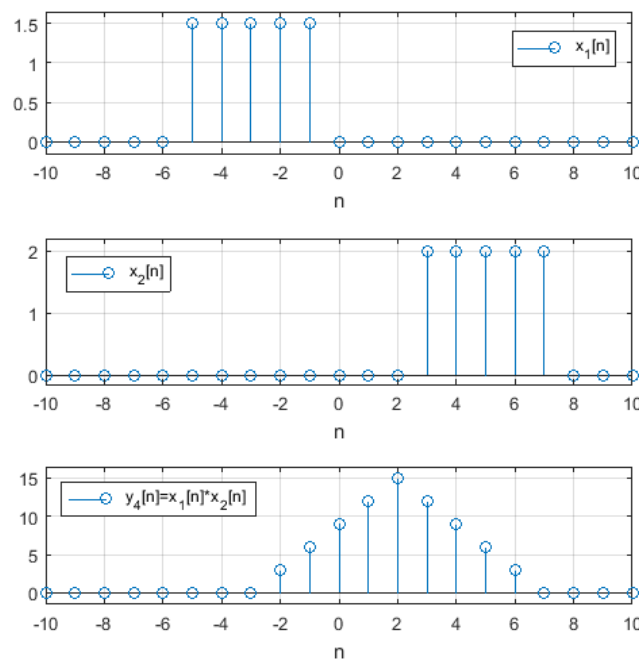


Figura 7. Representación de $x_1[n]$, $x_2[n]$ e $y_4[n]$, con $N = 5$, $n_1 = -5$, $n_2 = 3$, $A_1 = 1.5$ y $A_2 = 2$.

1.3.2. Convolución con al menos una señal infinita orientada a un lado

De entrada, vamos a distinguir entre el caso en que la primera señal involucrada en la convolución es infinita orientada a la derecha y el caso en que es infinita orientada a la izquierda. Y, para cada uno de estos dos casos, vamos a estudiar qué ocurre si la segunda señal involucrada en la convolución es finita, infinita con la misma orientación que la primera, o infinita con orientación opuesta a la de la primera.

Como siempre, conviene recordar que, gracias a la propiedad conmutativa de la convolución, en la definición de esta casuística no hay pérdida de generalidad.

Convolución con señal infinita orientada a la derecha

Sea el cálculo de una convolución ($y(t) = x_1(t) * x_2(t)$, o $y[n] = x_1[n] * x_2[n]$). Sean $x_1(t)$ y $x_1[n]$ dos señales infinitas y orientadas a la derecha cualesquiera:

$$\begin{cases} x_1(t) = 0 \quad \forall t < t_1 \\ \nexists t_0 \text{ tal que } x_1(t) = 0 \quad \forall t > t_0 \end{cases} \quad (105)$$

$$\begin{cases} x_1[n] = 0 \quad \forall n < n_1 \\ \nexists n_0 \text{ tal que } x_1[n] = 0 \quad \forall n > n_0 \end{cases} \quad (106)$$

allí donde t_1 y n_1 son el instante y la muestra iniciales, respectivamente, de $x_1(t)$ y $x_1[n]$, con $t_1 \in \mathbb{R}$ y $n_1 \in \mathbb{Z}$.

En primer lugar, considérese que $x_2(t)$ y $x_2[n]$ son dos señales de longitud finita cualesquiera:

$$x_2(t) = 0, \quad \forall t \notin [t_{2i}, t_{2f}] \quad (107)$$

$$x_2[n] = 0, \quad \forall n \notin \{n_{2i}, \dots, n_{2f}\} \quad (108)$$

allí donde t_{2i} y t_{2f} son los instantes inicial y final de $x_2(t)$, y donde n_{2i} y n_{2f} son las muestras inicial y final $x_2[n]$, siendo $t_{2i} \geq t_{2f}$ y $n_{2i} \geq n_{2f}$, y con $t_{2i}, t_{2f} \in \mathbb{R}$ y $n_{2i}, n_{2f} \in \mathbb{Z}$.

En este caso, la convolución entre una señal infinita orientada a la derecha cualquiera y una señal finita cualquiera queda definida en tres tramos:

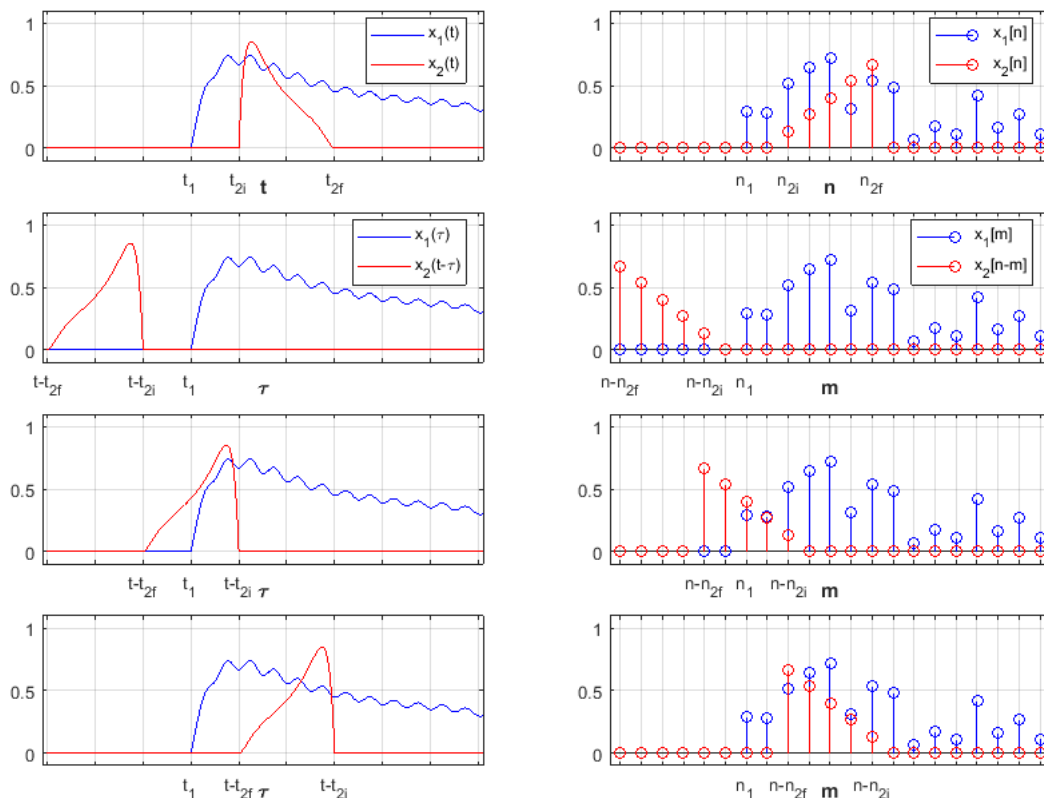


Figura 8. Definición en tres tramos de la convolución entre una señal infinita orientada a la derecha cualquiera y una señal finita cualquiera. Columna izquierda: caso analógico. Columna derecha: caso digital.

Así, la señal resultante de la convolución entre estos dos tipos de señales se define como:

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < t_1 + t_{2i} \\ \int_{t_1}^{t-t_{2i}} x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau & \text{para } t \in [t_1 + t_{2i}, t_1 + t_{2f}) \\ \int_{t-t_{2f}}^{t-t_{2i}} x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau & \text{para } t \geq t_1 + t_{2f} \end{cases} \quad (109)$$

$$y[n] = \begin{cases} 0 & \text{para } n < n_1 + n_{2i} \\ \sum_{m=n_1}^{n-n_{2i}} x_1[m]x_2[n-m] & \text{para } n \in \{n_1 + n_{2i}, \dots, n_1 + n_{2f} - 1\} \\ \sum_{m=n-n_{2f}}^{n-n_{2i}} x_1[m]x_2[n-m] & \text{para } n \geq n_1 + n_{2f} \end{cases} \quad (110)$$

allí donde $t_1 + t_{2i}$ y $n_1 + n_{2i}$ son el instante y la muestra iniciales, respectivamente, de $y(t)$ e $y[n]$. Por tanto, **la señal resultante de la convolución entre una señal infinita orientada a la derecha cualquiera y una señal finita cualquiera es una señal infinita orientada a la derecha.**

En segundo lugar, considérese que $x_2(t)$ y $x_2[n]$ también son dos señales infinitas y orientadas a la derecha cualesquiera (es decir, con la misma orientación que $x_1(t)$ y $x_1[n]$):

$$\begin{cases} x_2(t) = 0 \quad \forall t < t_2 \\ \exists t_0 \text{ tal que } x_2(t) = 0 \quad \forall t > t_0 \end{cases} \quad (111)$$

$$\begin{cases} x_2[n] = 0 \quad \forall n < n_2 \\ \exists n_0 \text{ tal que } x_2[n] = 0 \quad \forall n > n_0 \end{cases} \quad (112)$$

allí donde t_2 y n_2 son el instante y la muestra iniciales de $x_2(t)$ y $x_2[n]$, con $t_2 \in \mathbb{R}$ y $n_2 \in \mathbb{Z}$.

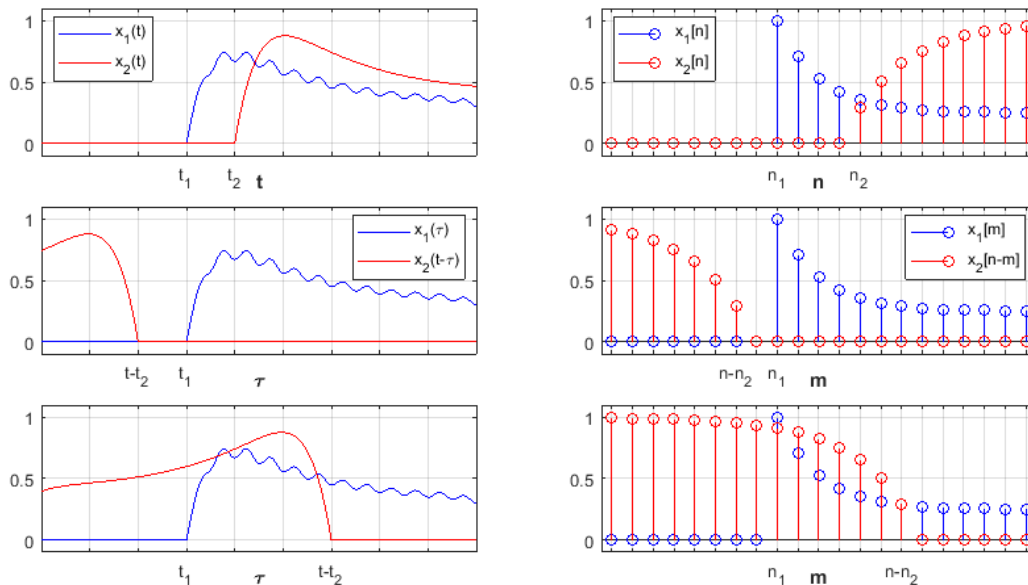


Figura 9. Definición en dos tramos de la convolución entre dos señales infinitas orientadas a la derecha cualesquiera. Columna izquierda: caso analógico. Columna derecha: caso digital.

Aquí, tal y como ilustra la Figura 9, **la convolución entre dos señales infinitas orientadas a la derecha cualesquiera queda definida en dos tramos.**

Así, la señal resultante de la convolución entre estos dos tipos de señales se define como:

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < t_1 + t_2 \\ \int_{t_1}^{t-t_2} x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau & \text{para } t \geq t_1 + t_2 \end{cases} \quad (113)$$

$$y[n] = \begin{cases} 0 & \text{para } n < n_1 + n_2 \\ \sum_{m=n_1}^{n-n_2} x_1[m]x_2[n-m] & \text{para } n \geq n_1 + n_2 \end{cases} \quad (114)$$

allí donde $t_1 + t_2$ y $n_1 + n_2$ son el instante y la muestra iniciales, respectivamente, de $y(t)$ e $y[n]$. Por tanto, **la señal resultante de la convolución entre dos señales infinitas orientadas a la derecha cualesquiera es una señal infinita orientada a la derecha.**

Y, en tercer lugar, considérese que $x_2(t)$ y $x_2[n]$ son dos señales infinitas y orientadas a la izquierda cualesquiera (es decir, con orientación opuesta a la de $x_1(t)$ y $x_1[n]$):

$$\begin{cases} x_2(t) = 0 \quad \forall t > t_2 \\ \exists t_0 \text{ tal que } x_2(t) = 0 \quad \forall t < t_0 \end{cases} \quad (115)$$

$$\begin{cases} x_2[n] = 0 \quad \forall n > n_2 \\ \exists n_0 \text{ tal que } x_2[n] = 0 \quad \forall n < n_0 \end{cases} \quad (116)$$

allí donde t_2 y n_2 son el instante y la muestra finales de $x_2(t)$ y $x_2[n]$, con $t_2 \in \mathbb{R}$ y $n_2 \in \mathbb{Z}$.

En este caso, **la convolución entre dos señales infinitas cualesquiera con orientaciones opuestas queda definida en dos tramos** (la señal «fijada» es la orientada a la derecha):

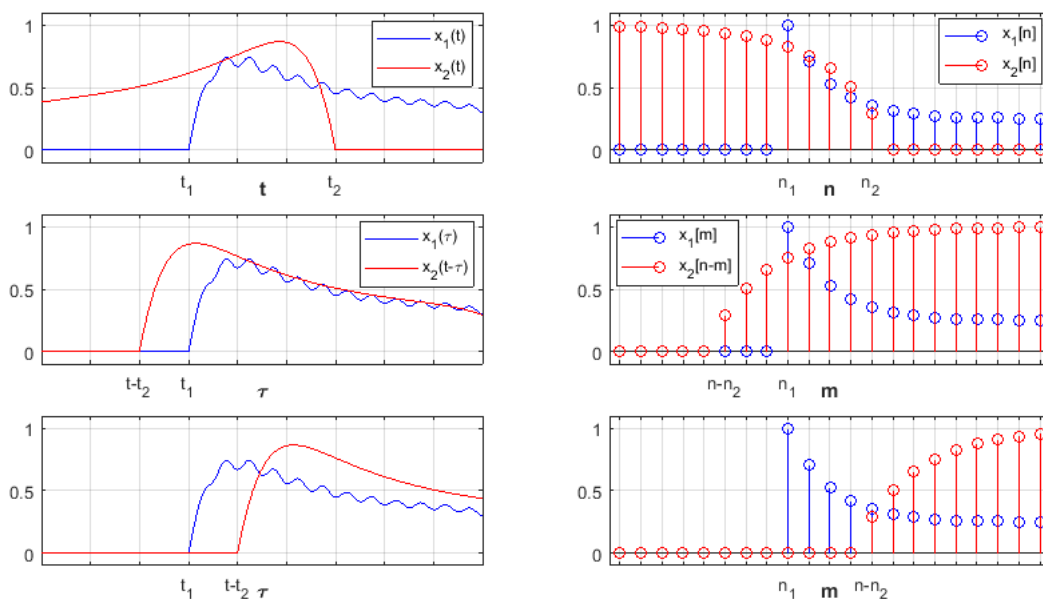


Figura 10. Definición en dos tramos de la convolución entre dos señales infinitas cualesquiera con orientaciones opuestas. Columna izquierda: caso analógico. Columna derecha: caso digital.

Así, la señal resultante de la convolución entre estos dos tipos de señales se define como:

$$y(t) = \begin{cases} \int_{t_1}^{+\infty} x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau & \text{para } t < t_1 + t_2 \\ \int_{t-t_2}^{+\infty} x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau & \text{para } t \geq t_1 + t_2 \end{cases} \quad (117)$$

$$y[n] = \begin{cases} \sum_{m=n_1}^{+\infty} x_1[m]x_2[n-m] & \text{para } n < n_1 + n_2 \\ \sum_{m=n-n_2}^{+\infty} x_1[m]x_2[n-m] & \text{para } n \geq n_1 + n_2 \end{cases} \quad (118)$$

Por tanto, **la señal resultante de la convolución entre dos señales infinitas cualesquiera de orientaciones opuestas es una señal infinita orientada a ambos lados.**

Finalmente, se propone un ejercicio de cálculo de la convolución con al menos una señal infinita orientada a la derecha:

Ejemplo 2

Se pide calcular las siguiente convoluciones y representar gráficamente los resultados:

$$y_1(t) = u(t) * \Pi\left(\frac{t}{T}\right) \quad (119)$$

$$y_2(t) = u(t) * u(t) \quad (120)$$

$$y_3[n] = (a^n u[n]) * u[n] \quad (121)$$

$$y_4[n] = (a^n u[n]) * u[-n] \quad (122)$$

siendo T una constante real ($T \in \mathbb{R}$), con $T > 0$ y a una constante compleja ($a \in \mathbb{C}$), con $|a| < 1$.

Solución

a) La primera convolución es entre un escalón unitario (señal infinita orientada a la derecha con inicio en $t = 0$) y un pulso cuadrado (señal finita comprendida entre $t = -T/2$ y $t = T/2$):

$$y_1(t) = x_1(t) * x_2(t) = u(t) * \Pi\left(\frac{t}{T}\right) \quad (123)$$

$$x_1(t) = u(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < 0 \\ 1 & \text{para } t \geq 0 \end{cases} \quad (124)$$

$$x_2(t) = \Pi\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1 & \text{para } t \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right] \\ 0 & \text{para } t \notin \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right] \end{cases} \quad (125)$$

Así, planteamos la convolución por tramos definida en la Figura 8 y, de acuerdo con (109), **el resultado es una señal infinita orientada a la derecha con inicio en $t = -T/2$** que queda definida en tres intervalos (nótese que $u(\tau)\Pi(t-\tau) = 1$ en los tramos con solapamiento):

$$y_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < -\frac{T}{2} \\ \int_0^{t+T/2} d\tau & \text{para } t \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right) \\ \int_{t-T/2}^{t+T/2} d\tau & \text{para } t \geq \frac{T}{2} \end{cases} \quad (126)$$

Resolvemos las integrales de los tramos segundo y tercero de la convolución:

$$\int_0^{t+T/2} d\tau = [\tau]_0^{t+T/2} = t + \frac{T}{2} - 0 = t + \frac{T}{2} \quad (127)$$

$$\int_{t-T/2}^{t+T/2} d\tau = [\tau]_{t-T/2}^{t+T/2} = t + \frac{T}{2} - \left(t - \frac{T}{2}\right) = T \quad (128)$$

Y, así, obtenemos el resultado definitivo de la convolución:

$$y_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < -\frac{T}{2} \\ t + \frac{T}{2} & \text{para } t \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right) \\ T & \text{para } t \geq \frac{T}{2} \end{cases} \quad (129)$$

Vemos, pues, que $y_1(t)$ es una señal que vale 0 hasta $t = -T/2$, cuya amplitud crece linealmente hasta T entre $t = -T/2$ y $t = T/2$, y se mantiene constante en T a partir de $t = T/2$. De hecho, podemos reescribirla del siguiente modo:

$$y_1(t) = u(t) * \Pi\left(\frac{t}{T}\right) = \left(t + \frac{T}{2}\right) \left(u\left(t + \frac{T}{2}\right) - u\left(t - \frac{T}{2}\right)\right) + Tu\left(t - \frac{T}{2}\right) \quad (130)$$

Comprobamos el resultado obtenido con MATLAB y representamos gráficamente las señales:

```
>> syms u(t) x1(t) x2(t) y1(t) T tau;
>> int(1,tau,0,t+(T/2)) % Integral del segundo tramo

ans =

T/2 + t

>> int(1,tau,t-(T/2),t+(T/2)) % Integral del tercer tramo

ans =

T

>> T = 2; % Fijamos arbitrariamente T=2 para la representación gráfica
>> u(t) = piecewise(t<0,0,t>=0,1);
>> x1(t) = u(t);
>> x2(t) = piecewise(t<(-T/2),0,(-T/2)<=t<=(T/2),1,t>(T/2),0);
>> y1(t) = ((t+(T/2))*(u(t+(T/2))-u(t-(T/2))))+T*u(t-(T/2));
>> figure;
>> fplot(x1(t),[-2*T,2*T]); % Representamos x1(t)
>> hold on;
>> fplot(x2(t),[-2*T,2*T]); % Representamos x2(t)
>> fplot(y1(t),[-2*T,2*T]); % Representamos y1(t)
```

```
>> axis([-2*T 2*T -0.1 1.1*T]);
>> grid on;
>> xlabel('t');
>> legend({'x_1(t)', 'x_2(t)', 'y_1(t)=x(t)*x(t)'}, 'Location', 'northwest');
```

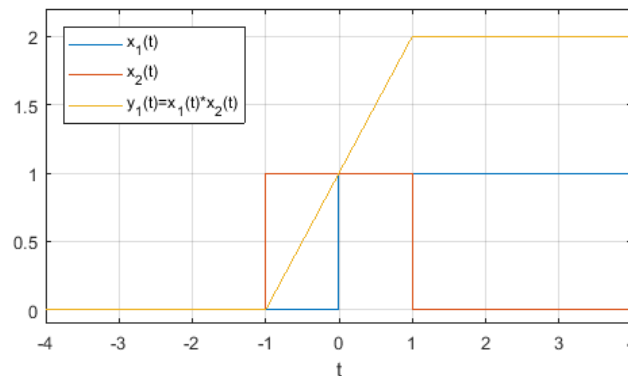


Figura 11. Representación gráfica de $x_1(t)$, $x_2(t)$ e $y_1(t)$, con $T = 2$.

b) La segunda convolución es entre dos escalones unitarios, es decir, entre dos señales infinitas orientadas a la derecha con inicio en $t = 0$:

$$y_2(t) = x(t) * x(t) = u(t) * u(t) \quad (131)$$

$$x(t) = u(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < 0 \\ 1 & \text{para } t \geq 0 \end{cases} \quad (132)$$

Planteamos, pues, la convolución por tramos definida en la Figura 9 y, de acuerdo con la ecuación (113), **el resultado es una señal infinita orientada a la derecha con inicio en $t = 0$** que queda definida en los dos intervalos siguientes (nótese que $u(\tau)u(t - \tau) = 1$ en el tramo con solapamiento):

$$y_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < 0 \\ \int_0^t d\tau & \text{para } t \geq 0 \end{cases} \quad (133)$$

Resolvemos la integral del segundo tramo de la convolución:

$$\int_0^t d\tau = [\tau]_0^t = t - 0 = t \quad (134)$$

Y, así, obtenemos el resultado definitivo de la convolución:

$$y_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < 0 \\ t & \text{para } t \geq 0 \end{cases} \quad (135)$$

Vemos, pues, que $y_2(t)$ es una señal cuya amplitud es 0 hasta $t = 0$ y que crece linealmente y de forma indefinida a partir de $t = 0$:

$$\boxed{u(t) * u(t) = tu(t)} \quad (136)$$

Comprobamos el resultado obtenido con MATLAB y representamos gráficamente las señales:

```
>> syms u(t) x(t) y2(t) tau;
>> int(1,tau,0,t) % Integral del segundo tramo
```



```
ans =

t

>> u(t) = piecewise(t<0,0,t>=0,1);
>> x(t) = u(t);
>> y2(t) = t*u(t);
>> figure;
>> fplot(x(t), [-4,4]); % Representamos x(t)
>> hold on;
>> fplot(y2(t), [-4,4]); % Representamos y2(t)
>> axis([-4 4 -0.1 4.1]);
>> grid on;
>> xlabel('t');
>> legend({'x(t)', 'y_2(t)=x(t)*x(t)'}, 'Location', 'northwest');
```

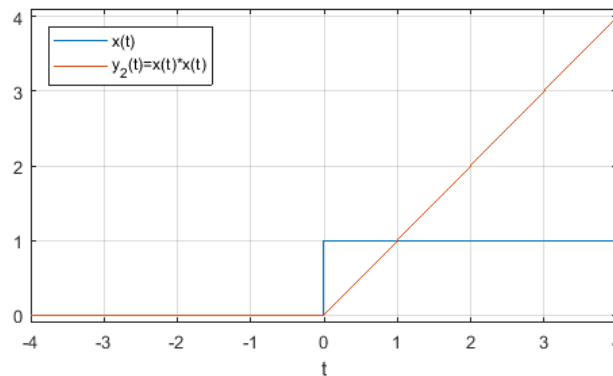


Figura 12. Representación gráfica de $x(t)$ e $y_2(t)$.

c) La tercera convolución es entre el producto de una señal exponencial por un escalón unitario (señal infinita orientada a la derecha con inicio en la muestra $n = 0$) y un escalón unitario (señal infinita orientada a la derecha con inicio en la muestra $n = 0$):

$$y_3[n] = x_1[n] * x_2[n] = (a^n u[n]) * u[n] \quad (137)$$

$$x_1[n] = a^n u[n] = \begin{cases} 0 & \text{para } n < 0 \\ a^n & \text{para } n \geq 0 \end{cases} \quad (138)$$

$$x_2[n] = u[n] = \begin{cases} 0 & \text{para } n < 0 \\ 1 & \text{para } n \geq 0 \end{cases} \quad (139)$$

Planteamos, pues, la convolución por tramos definida en la Figura 9 y, de acuerdo con la ecuación (114), **el resultado es una señal infinita orientada a la derecha con inicio en $n = 0$** que queda definida en los dos intervalos siguientes:

$$y_3[n] = \begin{cases} 0 & \text{para } n < 0 \\ \sum_{m=0}^n a^m & \text{para } n \geq 0 \end{cases} \quad (140)$$

Resolvemos el sumatorio del segundo tramo, que es una serie geométrica que siempre convergirá, puesto que $|a| < 1$:

$$\sum_{m=0}^n a^m = \frac{a^0 - a^{n+1}}{1 - a} = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} \quad (141)$$

Y, así, obtenemos el resultado definitivo de la convolución:

$$y_3[n] = \begin{cases} 0 & \text{para } n < 0 \\ \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} & \text{para } n \geq 0 \end{cases} \quad (142)$$

Vemos, pues, que $y_3[n]$ es una señal cuya amplitud es igual a 0 hasta $n = -1$ y que crece de forma indefinida tendiendo asintóticamente a $1/(1 - a)$ a partir de $n = 0$ (ver la Figura 13):

$$(a^n u[n]) * u[n] = \left(\frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} \right) u[n], \quad \forall |a| < 1 \quad (143)$$

Comprobamos el resultado obtenido con MATLAB y representamos gráficamente las señales:

```
>> syms n m integer;
>> syms a complex; % Definimos a como variable simbólica compleja
>> assume(abs(a)<1); % Forzamos la condición de que |a|<1
>> simplify(symsum(a^m,m,0,n)) % Sumatorio del segundo tramo

ans =

(a^(n + 1) - 1)/(a - 1)

>> assume(a,'clear'); % Eliminamos la condición forzada para la variable a
>> a = 1/2; % Fijamos arbitrariamente a=1/2 para la representación gráfica
>> n = -10:1:20;
>> u = zeros(size(n));
>> u(n>=0) = 1;
>> x = u;
>> y3 = (2-a.^n).*u;
>> figure;
>> subplot(2,1,1);
>> stem(n,x); % Representamos x[n]
>> axis([n(1) n(end) -0.1 1.1]);
>> grid on;
>> xlabel('n');
>> legend('x[n]', 'Location', 'northwest');
>> subplot(2,1,2);
>> stem(n,y3); % Representamos y3[n]
>> axis([n(1) n(end) -0.1 2.1]);
>> grid on;
>> xlabel('n');
>> legend('y_3[n]=x [n]*x[n]', 'Location', 'northwest');
```

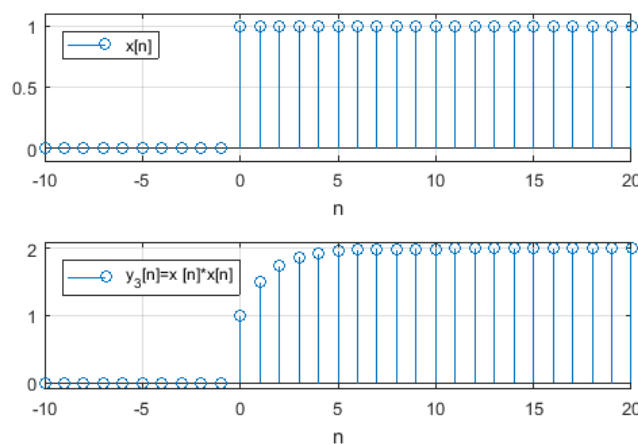


Figura 13. Representación gráfica de $x[n]$ e $y_3[n]$, con $a = 1/2$.

Nótese el uso de la función **assume**, para establecer condiciones de los valores de las variables simbólicas, y de la función **simplify**, para simplificar expresiones simbólicas.

d) La cuarta convolución es entre el producto de una señal exponencial por un escalón unitario (señal infinita orientada a la derecha con inicio en la muestra $n = 0$) y un escalón unitario sometido a una reflexión horizontal (señal infinita orientada a la izquierda con final en la muestra $n = 0$):

$$y_4[n] = x_1[n] * x_2[n] = (a^n u[n]) * u[-n] \quad (144)$$

$$x_1[n] = a^n u[n] = \begin{cases} 0 & \text{para } n < 0 \\ a^n & \text{para } n \geq 0 \end{cases} \quad (145)$$

$$x_2[n] = u[-n] = \begin{cases} 1 & \text{para } n \leq 0 \\ 0 & \text{para } n > 0 \end{cases} \quad (146)$$

Por tanto, planteamos la convolución por tramos definida en la Figura 10 y, de acuerdo con la ecuación (118), **el resultado es una señal infinita orientada a ambos lados** que queda definida en los dos intervalos siguientes:

$$y_4[n] = \begin{cases} \sum_{m=0}^{+\infty} a^m & \text{para } n < 0 \\ \sum_{m=n}^{+\infty} a^m & \text{para } n \geq 0 \end{cases} \quad (147)$$

Resolvemos ambos sumatorios (son dos series geométricas convergentes, puesto que $|a| < 1$):

$$\sum_{m=0}^{+\infty} a^m = \frac{a^0 - 0a}{1 - a} = \frac{1}{1 - a} \quad (148)$$

$$\sum_{m=n}^{+\infty} a^m = \frac{a^n - 0a}{1 - a} = \frac{a^n}{1 - a} \quad (149)$$

Y, así, obtenemos el resultado definitivo de la convolución:

$$y_3[n] = \begin{cases} \frac{1}{1 - a} & \text{para } n < 0 \\ \frac{a^n}{1 - a} & \text{para } n \geq 0 \end{cases} = \frac{1}{1 - a} (u[-n - 1] + a^n u[n]), \quad \forall |a| < 1 \quad (150)$$

Vemos, pues, que $y_3[n]$ es una señal cuya amplitud es igual a $1/(1 - a)$ hasta $n = -1$ y que decrece tendiendo asintóticamente a 0 a partir de $n = 0$ (ver la Figura 14):

Comprobamos el resultado obtenido con MATLAB y representamos gráficamente las señales:

```
>> syms n m integer;
>> syms a complex; % Definimos a como variable simbólica compleja
>> assume(abs(a)<1); % Forzamos la condición de que |a|<1
>> simplify(symsum(a^m,m,0,+Inf)) % Sumatorio del primer tramo

ans =

-1/(a - 1)

>> simplify(symsum(a^m,m,n,+Inf)) % Sumatorio del segundo tramo

ans =

-a^n/(a - 1)
```

```
>> assume(a, 'clear'); % Eliminamos la condición forzada para la variable a
>> a = 1/2; % Fijamos arbitrariamente a=1/2 para la representación gráfica
>> n = -20:1:20;
>> u = zeros(size(n));
>> u(n>=0) = 1;
>> x1 = (a.^n).*u;
>> x2 = u(end:-1:1); % Indexamos u[n] desde la última muestra hasta la primera
>> y4 = (1./(1-a)).*([u((end-1):-1:1) 0]+(a.^n).*u);
>> figure;
>> subplot(3,1,1);
>> stem(n,x1); % Representamos x1[n]
>> axis([n(1) n(end) -0.1 1.1]);
>> grid on;
>> xlabel('n');
>> legend('x_1[n]', 'Location', 'northwest');
>> subplot(3,1,2);
>> stem(n,x2); % Representamos x2[n]
>> axis([n(1) n(end) -0.1 1.1]);
>> grid on;
>> xlabel('n');
>> legend('x_2[n]', 'Location', 'northeast');
>> subplot(3,1,3);
>> stem(n,y4); % Representamos y4[n]
>> axis([n(1) n(end) -0.1 2.1]);
>> grid on;
>> xlabel('n');
>> legend('y_4[n]=x_1[n]*x_2[n]', 'Location', 'northeast');
```

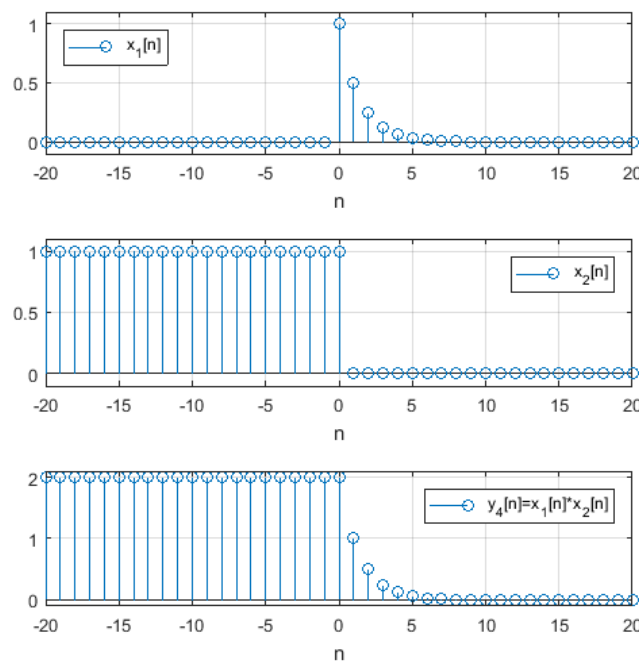


Figura 14. Representación de $x_1[n]$, $x_2[n]$ e $y_4[n]$, con $a = 1/2$.

Convolución con señal infinita orientada a la izquierda

Sea el cálculo de una convolución ($y(t) = x_1(t) * x_2(t)$, o $y[n] = x_1[n] * x_2[n]$). Sean ahora $x_1(t)$ y $x_1[n]$ dos señales infinitas y orientadas a la izquierda cualesquiera:

$$\begin{cases} x_1(t) = 0 \quad \forall t > t_1 \\ \nexists t_0 \text{ tal que } x_1(t) = 0 \quad \forall t < t_0 \end{cases} \quad (151)$$

$$\begin{cases} x_1[n] = 0 \quad \forall n > n_1 \\ \nexists n_0 \text{ tal que } x_1[n] = 0 \quad \forall n < n_0 \end{cases} \quad (152)$$

allí donde t_1 y n_1 son el instante y la muestra finales, respectivamente, de $x_1(t)$ y $x_1[n]$, con $t_1 \in \mathbb{R}$ y $n_1 \in \mathbb{Z}$.

En primer lugar, considérese que $x_2(t)$ y $x_2[n]$ son dos señales de longitud finita cualesquiera:

$$x_2(t) = 0, \forall t \notin [t_{2i}, t_{2f}] \quad (153)$$

$$x_2[n] = 0, \forall n \notin \{n_{2i}, \dots, n_{2f}\} \quad (154)$$

allí donde t_{2i} y t_{2f} son los instantes inicial y final de $x_2(t)$, y donde n_{2i} y n_{2f} son las muestras inicial y final $x_2[n]$, siendo $t_{2i} \geq t_{2f}$ y $n_{2i} \geq n_{2f}$, y con $t_{2i}, t_{2f} \in \mathbb{R}$ y $n_{2i}, n_{2f} \in \mathbb{Z}$.

En este caso, la **convolución entre una señal infinita orientada a la izquierda cualquiera y una señal finita cualquiera queda definida en tres tramos**:

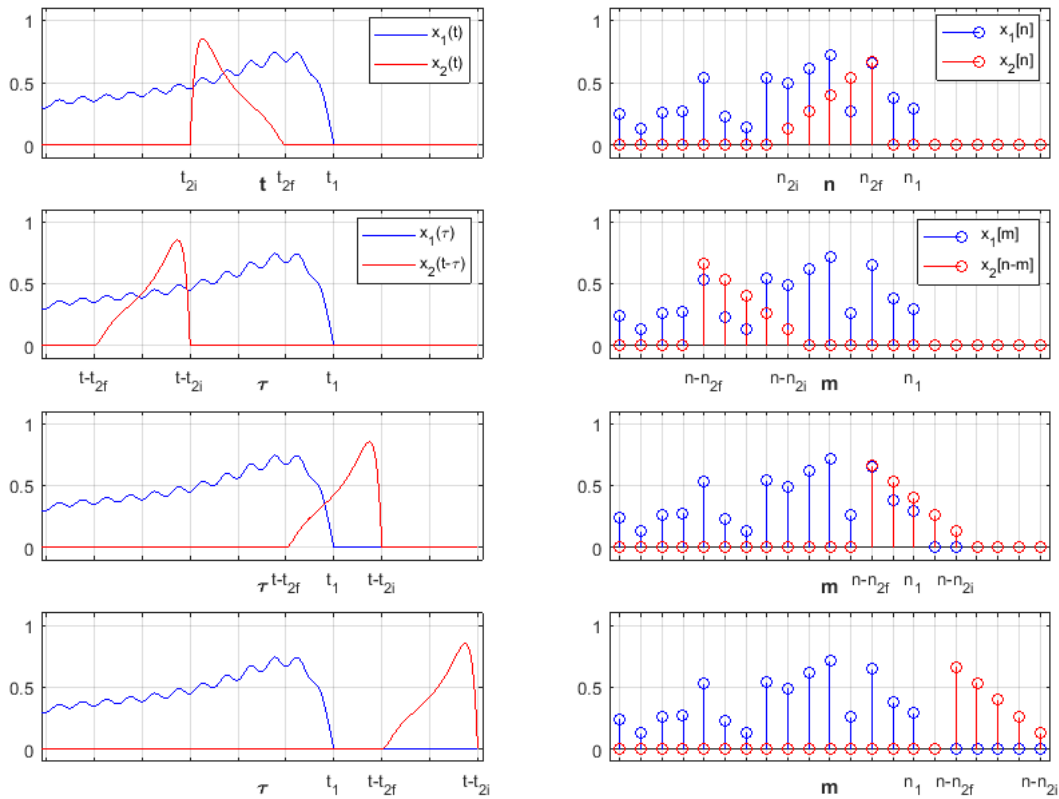


Figura 15. Definición en tres tramos de la convolución entre una señal infinita orientada a la izquierda cualquiera y una señal finita cualquiera. Columna izquierda: caso analógico. Columna derecha: caso digital.

Así, la señal resultante de la convolución entre estos dos tipos de señales se define como:

$$y(t) = \begin{cases} \int_{t-t_{2f}}^{t-t_{2i}} x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau & \text{para } t \leq t_1 + t_{2i} \\ \int_{t-t_{2f}}^{t_1} x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau & \text{para } t \in (t_1 + t_{2i}, t_1 + t_{2f}] \\ 0 & \text{para } t > t_1 + t_{2f} \end{cases} \quad (155)$$

$$y[n] = \begin{cases} \sum_{m=n-n_{2f}}^{n-n_{2i}} x_1[m]x_2[n-m] & \text{para } n \leq n_1 + n_{2i} \\ \sum_{m=n-n_{2f}}^{n_1} x_1[m]x_2[n-m] & \text{para } n \in \{n_1 + n_{2i} + 1, \dots, n_1 + n_{2f}\} \\ 0 & \text{para } n > n_1 + n_{2f} \end{cases} \quad (156)$$

allí donde $t_1 + t_{2i}$ y $n_1 + n_{2i}$ son el instante y la muestra finales, respectivamente de $y(t)$ e $y[n]$.

Por tanto, **la señal resultante de la convolución entre una señal infinita orientada a la izquierda cualquiera y una señal finita cualquiera es una señal infinita orientada a la izquierda.**

En segundo lugar, considérese que $x_2(t)$ y $x_2[n]$ también son dos señales infinitas y orientadas a la izquierda cualesquiera (es decir, con la misma orientación que $x_1(t)$ y $x_1[n]$):

$$\begin{cases} x_2(t) = 0 \quad \forall t > t_2 \\ \exists t_0 \text{ tal que } x_2(t) = 0 \quad \forall t < t_0 \end{cases} \quad (157)$$

$$\begin{cases} x_2[n] = 0 \quad \forall n > n_2 \\ \exists n_0 \text{ tal que } x_2[n] = 0 \quad \forall n < n_0 \end{cases} \quad (158)$$

allí donde t_2 y n_2 son el instante y la muestra finales, respectivamente, de $x_2(t)$ y $x_2[n]$, con $t_2 \in \mathbb{R}$ y $n_2 \in \mathbb{Z}$.

En este caso, **la convolución entre dos señales infinitas orientadas a la izquierda cualesquiera queda definida en dos tramos:**

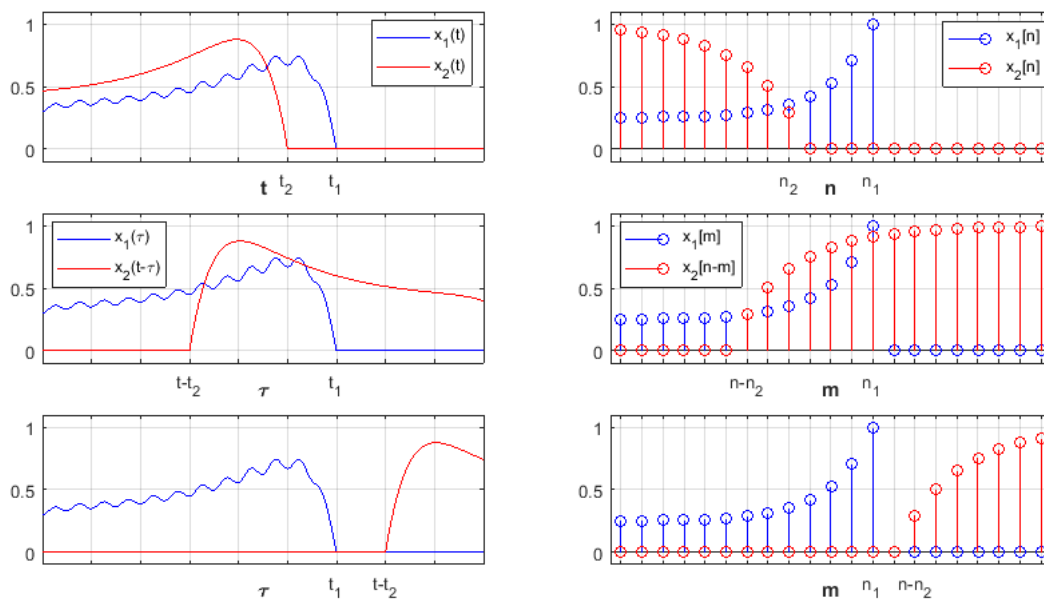


Figura 16. Definición en dos tramos de la convolución entre dos señales infinitas orientadas a la izquierda cualesquiera. Columna izquierda: caso analógico. Columna derecha: caso digital.

Así, la señal resultante de la convolución entre estos dos tipos de señales se define como:

$$y(t) = \begin{cases} \int_{t-t_2}^{t_1} x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau & \text{para } t \leq t_1 + t_2 \\ 0 & \text{para } t > t_1 + t_2 \end{cases} \quad (159)$$

$$y[n] = \begin{cases} \sum_{m=n-n_2}^{n_1} x_1[m]x_2[n-m] & \text{para } n \leq n_1 + n_2 \\ 0 & \text{para } n > n_1 + n_2 \end{cases} \quad (160)$$

allí donde $t_1 + t_2$ y $n_1 + n_2$ son el instante y la muestra finales, respectivamente, de $y(t)$ e $y[n]$. Por tanto, **la señal resultante de la convolución entre dos señales infinitas orientadas a la izquierda cualesquiera es una señal infinita orientada a la izquierda.**

Y, en tercer lugar, el caso en que $x_2(t)$ y $x_2[n]$ son dos señales infinitas y orientadas a la derecha cualesquiera (es decir, con orientación opuesta a la de $x_1(t)$ y $x_1[n]$) ya lo hemos considerado antes: si las dos señales involucradas en el cálculo de la convolución son infinitas y con orientaciones opuestas, tanto da cuál de las dos esté orientada a un lado o al otro, puesto que la convolución posee la propiedad conmutativa y ambos casos son exactamente el mismo.

Finalmente, se propone un ejercicio de cálculo de la convolución con al menos una señal infinita orientada a la izquierda:

Ejemplo 3

Se pide calcular las siguientes convoluciones y representar gráficamente los resultados:

$$y_1(t) = u(-t) * \Pi\left(\frac{t}{T}\right) \quad (161)$$

$$y_2[n] = (a^{-n}u[-n]) * u[-n] \quad (162)$$

siendo T una constante real ($T \in \mathbb{R}$), con $T > 0$ y a una constante compleja ($a \in \mathbb{C}$), con $|a| < 1$.

Solución

a) La primera convolución es entre un escalón unitario sometido a una reflexión horizontal (señal infinita orientada a la izquierda con final en $t = 0$) y un pulso cuadrado (señal finita comprendida entre $t = -T/2$ y $t = T/2$):

$$y_1(t) = x_1(t) * x_2(t) = u(-t) * \Pi\left(\frac{t}{T}\right) \quad (163)$$

$$x_1(t) = u(-t) = \begin{cases} 1 & \text{para } t \leq 0 \\ 0 & \text{para } t > 0 \end{cases} \quad (164)$$

$$x_2(t) = \Pi\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1 & \text{para } t \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right] \\ 0 & \text{para } t \notin \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right] \end{cases} \quad (165)$$

Así, planteamos la convolución por tramos definida en la Figura 15 y, de acuerdo con (155), **el resultado es una señal infinita orientada a la izquierda con final en $t = T/2$ que queda definida en tres intervalos (nótese que $u(-\tau)\Pi(t-\tau) = 1$ en los tramos con solapamiento):**

$$y_1(t) = \begin{cases} \int_{t-T/2}^{t+T/2} d\tau & \text{para } t \leq -\frac{T}{2} \\ \int_{t-T/2}^0 d\tau & \text{para } t \in \left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right] \\ 0 & \text{para } t > \frac{T}{2} \end{cases} \quad (166)$$

Resolvemos las integrales de los tramos primero y segundo de la convolución:

$$\int_{t-T/2}^{t+T/2} d\tau = [\tau]_{t-T/2}^{t+T/2} = t + \frac{T}{2} - \left(t - \frac{T}{2}\right) = T \quad (167)$$

$$\int_{t-T/2}^0 d\tau = [\tau]_{t-T/2}^0 = 0 - \left(t - \frac{T}{2}\right) = \frac{T}{2} - t \quad (168)$$

Y, así, obtenemos el resultado definitivo de la convolución:

$$y_1(t) = \begin{cases} T & \text{para } t \leq -\frac{T}{2} \\ \frac{T}{2} - t & \text{para } t \in \left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right] \\ 0 & \text{para } t > \frac{T}{2} \end{cases} \quad (169)$$

Vemos, pues, que $y_1(t)$ es una señal que vale T hasta $t = -T/2$, cuya amplitud decrece linealmente hasta 0 entre $t = -T/2$ y $t = T/2$, y se mantiene igual a 0 a partir de $t = T/2$. De hecho, podemos reescribirla del siguiente modo:

$$y_1(t) = u(t) * \Pi\left(\frac{t}{T}\right) = Tu\left(-t - \frac{T}{2}\right) + \left(\frac{T}{2} - t\right)\left(u\left(-t + \frac{T}{2}\right) - u\left(-t - \frac{T}{2}\right)\right) \quad (170)$$

Comprobamos el resultado obtenido con MATLAB y representamos gráficamente las señales:

```
>> syms u(t) x1(t) x2(t) y1(t) T tau;
>> int(1,tau,t-(T/2),t+(T/2)) % Integral del primer tramo

ans =

T

>> int(1,tau,t-(T/2),0) % Integral del segundo tramo

ans =

T/2 - t

>> T = 2; % Fijamos arbitrariamente T=2 para la representación gráfica
>> u(t) = piecewise(t<0,0,t>=0,1);
>> x1(t) = u(-t);
>> x2(t) = piecewise(t<(-T/2),0,(-T/2)<=t<=(T/2),1,t>(T/2),0);
>> y1(t) = T*u(-t-(T/2)) + ((T/2)-t)*(u(-t+(T/2))-u(-t-(T/2)));
>> figure;
>> fplot(x1(t),[-2*T,2*T]); % Representamos x1(t)
>> hold on;
>> fplot(x2(t),[-2*T,2*T]); % Representamos x2(t)
>> fplot(y1(t),[-2*T,2*T]); % Representamos y1(t)
```



```
>> axis([-2*T 2*T -0.1 1.1*T]);
>> grid on;
>> xlabel('t');
>> legend({'x_1(t)', 'x_2(t)', 'y_1(t)=x(t)*x(t)'}, 'Location', 'northeast');
```

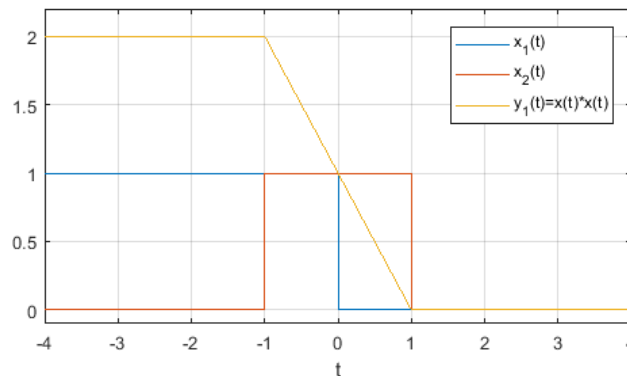


Figura 17. Representación gráfica de $x_1(t)$, $x_2(t)$ e $y_1(t)$, con $T = 2$.

b) La segunda convolución es entre el producto de una exponencial por un escalón unitario reflejados horizontalmente (señal infinita orientada a la izquierda con final en la muestra $n = 0$) y un escalón unitario también sometido a una reflexión horizontal (señal infinita orientada a la izquierda con final en la muestra $n = 0$):

$$y_2[n] = x_1[n] * x_2[n] = (a^{-n}u[-n]) * u[-n] \quad (171)$$

$$x_1[n] = a^{-n}u[-n] = \begin{cases} a^{-n} & \text{para } n \leq 0 \\ 0 & \text{para } n > 0 \end{cases} \quad (172)$$

$$x_2[n] = u[-n] = \begin{cases} 1 & \text{para } n \leq 0 \\ 0 & \text{para } n > 0 \end{cases} \quad (173)$$

Por tanto, planteamos la convolución por tramos definida en la Figura 16 y, de acuerdo con la ecuación (160), **el resultado es una señal infinita orientada a la izquierda con final en la muestra $n = 0$** que queda definida en los dos intervalos siguientes:

$$y_2[n] = \begin{cases} \sum_{m=n}^0 a^{-m} & \text{para } n \leq 0 \\ 0 & \text{para } n > 0 \end{cases} \quad (174)$$

Resolvemos el sumatorio del primer tramo de la convolución, que es una serie geométrica convergente:

$$\sum_{m=n}^0 a^{-m} = \frac{a^{-n} - 1a^{-1}}{1 - a^{-1}} = \frac{a^{-n+1} - 1}{a - 1} = \frac{1 - a^{-n+1}}{1 - a} \quad (175)$$

Y, así, obtenemos el resultado definitivo de la convolución:

$$y_2[n] = \begin{cases} \frac{1 - a^{-n+1}}{1 - a} & \text{para } n \leq 0 \\ 0 & \text{para } n > 0 \end{cases} = \frac{1 - a^{-n+1}}{1 - a} u[-n], \quad \forall |a| < 1 \quad (176)$$

Vemos, pues, que $y_2[n]$ es una señal cuya amplitud crece tendiendo asintóticamente a $1/(1 - a)$ a medida que n se va haciendo más negativa desde $n = 0$, y es igual a 0 a partir de $n = 1$ (ver la Figura 18):

Comprobamos el resultado obtenido con MATLAB y representamos gráficamente las señales:

```
>> syms n m integer;
>> syms a complex; % Definimos a como variable simbólica compleja
>> assume(abs(a)<1); % Forzamos la condición de que |a|<1
>> symsum(a^(-m),m,n,0) % Sumatorio del primer tramo

ans =

(a - a^n)/(a^n*(a - 1))

>> assume(a,'clear'); % Eliminamos la condición forzada para la variable a
>> a = 1/2; % Fijamos arbitrariamente a=1/2 para la representación gráfica
>> n = -20:1:20;
>> u = zeros(size(n));
>> u(n>=0) = 1;
>> x1 = (a.^(-n)).*u(end:-1:1);
>> x2 = u(end:-1:1);
>> y2 = ((1-a.^(-n+1))./(1-a)).*u(end:-1:1);
>> figure;
>> subplot(3,1,1);
>> stem(n,x1); % Representamos x1[n]
>> axis([n(1) n(end) -0.1 1.1]);
>> grid on;
>> xlabel('n');
>> legend('x_1[n]', 'Location', 'northeast');
>> subplot(3,1,2);
>> stem(n,x2); % Representamos x2[n]
>> axis([n(1) n(end) -0.1 1.1]);
>> grid on;
>> xlabel('n');
>> legend('x_2[n]', 'Location', 'northeast');
>> subplot(3,1,3);
>> stem(n,y2); % Representamos y2[n]
>> axis([n(1) n(end) -0.1 2.1]);
>> grid on;
>> xlabel('n');
>> legend('y_2[n]=x_1[n]*x_2[n]', 'Location', 'northeast');
```

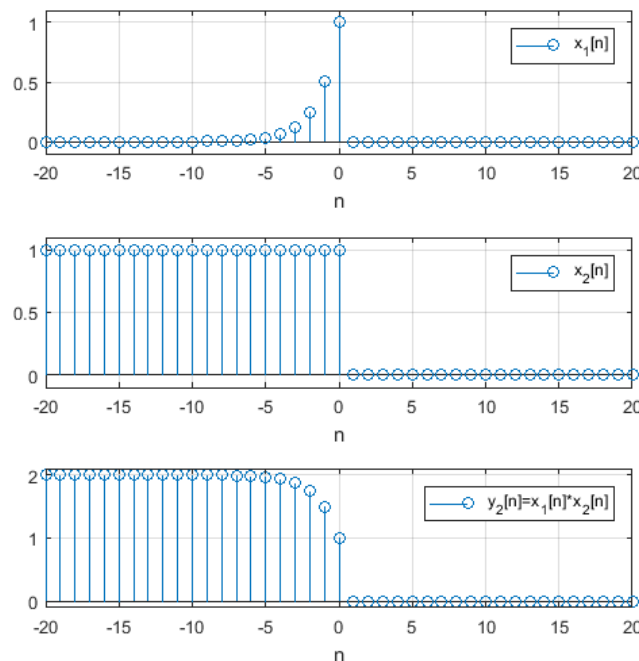


Figura 18. Representación de $x_1[n]$, $x_2[n]$ e $y_2[n]$, con $a = 1/2$.

1.3.3. Convolución con al menos una señal infinita orientada a ambos lados

Finalmente, si al menos una de las dos señales involucradas en el cálculo de la convolución es infinita orientada a ambos lados, la señal resultante de la convolución siempre será también una señal infinita orientada a ambos lados.

Esto se ve de forma muy evidente al plantear la convolución por tramos ($y(t) = x_1(t) * x_2(t)$, o $y[n] = x_1[n] * x_2[n]$) en el caso en que la señal girada y desplazada es una señal infinita orientada a ambos lados, la cual no tiene ni instante/muestra inicial ni instante/muestra final:

$$\begin{cases} \nexists t_0 \text{ tal que } x_2(t) = 0 \forall t < t_0 \\ \nexists t_0 \text{ tal que } x_2(t) = 0 \forall t > t_0 \end{cases} \quad (177)$$

$$\begin{cases} \nexists n_0 \text{ tal que } x_2[n] = 0 \forall n > n_0 \\ \nexists n_0 \text{ tal que } x_2[n] = 0 \forall n < n_0 \end{cases} \quad (178)$$

De este modo, la convolución queda siempre definida en un único tramo que abarca todo el recorrido de la variable independiente y los límites de la integral, o el sumatorio, quedan determinados por los límites de la señal «fijada» en el cálculo de la convolución.

Si $x_1(t)$ y $x_1[n]$ son dos señales de longitud finita cualesquiera:

$$x_1(t) = 0, \forall t \notin [t_{1i}, t_{1f}] \quad (179)$$

$$x_1[n] = 0, \forall n \notin \{n_{1i}, \dots, n_{1f}\} \quad (180)$$

entonces la señal resultante de la convolución con una señal infinita orientada a ambos lados es la siguiente (se indica también la expresión resultante de aplicar la propiedad conmutativa):

$$y(t) = \int_{t_{1i}}^{t_{1f}} x_1(\tau) x_2(t - \tau) d\tau = \int_{t - t_{1f}}^{t - t_{1i}} x_2(\tau) x_1(t - \tau) d\tau \quad (181)$$

$$y[n] = \sum_{m=n_{1i}}^{n_{1f}} x_1[m] x_2[n - m] = \sum_{m=n - n_{1f}}^{n - n_{1i}} x_2[m] x_1[n - m] \quad (182)$$

Si $x_1(t)$ y $x_1[n]$ son dos señales infinitas orientadas a la derecha cualesquiera:

$$\begin{cases} x_1(t) = 0 \forall t < t_1 \\ \nexists t_0 \text{ tal que } x_1(t) = 0 \forall t > t_0 \end{cases} \quad (183)$$

$$\begin{cases} x_1[n] = 0 \forall n < n_1 \\ \nexists n_0 \text{ tal que } x_1[n] = 0 \forall n > n_0 \end{cases} \quad (184)$$

entonces la señal resultante de la convolución con una señal infinita orientada a ambos lados es la siguiente (se indica también la expresión resultante de aplicar la propiedad conmutativa):

$$y(t) = \int_{t_1}^{+\infty} x_1(\tau) x_2(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{t - t_1} x_2(\tau) x_1(t - \tau) d\tau \quad (185)$$

$$y[n] = \sum_{m=n_1}^{+\infty} x_1[m]x_2[n-m] = \sum_{m=-\infty}^{n-n_1} x_2[m]x_1[n-m] \quad (186)$$

Si $x_1(t)$ y $x_1[n]$ son dos señales infinitas orientadas a la izquierda cualesquiera:

$$\begin{cases} x_1(t) = 0 \quad \forall t > t_1 \\ \exists t_0 \text{ tal que } x_1(t) = 0 \quad \forall t < t_0 \end{cases} \quad (187)$$

$$\begin{cases} x_1[n] = 0 \quad \forall n > n_1 \\ \exists n_0 \text{ tal que } x_1[n] = 0 \quad \forall n < n_0 \end{cases} \quad (188)$$

entonces la señal resultante de la convolución con una señal infinita orientada a ambos lados es la siguiente (se indica también la expresión resultante de aplicar la propiedad conmutativa):

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t_1} x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau = \int_{t-t_1}^{+\infty} x_2(\tau)x_1(t-\tau)d\tau \quad (189)$$

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{n_1} x_1[m]x_2[n-m] = \sum_{m=n-n_1}^{+\infty} x_2[m]x_1[n-m] \quad (190)$$

Y, si $x_1(t)$ y $x_1[n]$ son también dos señales infinitas orientadas a ambos lados cualesquiera:

$$\begin{cases} \exists t_0 \text{ tal que } x_1(t) = 0 \quad \forall t < t_0 \\ \exists t_0 \text{ tal que } x_1(t) = 0 \quad \forall t > t_0 \end{cases} \quad (191)$$

$$\begin{cases} \exists n_0 \text{ tal que } x_1[n] = 0 \quad \forall n > n_0 \\ \exists n_0 \text{ tal que } x_1[n] = 0 \quad \forall n < n_0 \end{cases} \quad (192)$$

entonces la señal resultante de la convolución con otra señal infinita orientada a ambos lados es la siguiente (se indica también la expresión resultante de aplicar la propiedad conmutativa):

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x_2(\tau)x_1(t-\tau)d\tau \quad (193)$$

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_1[m]x_2[n-m] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_2[m]x_1[n-m] \quad (194)$$

Finalmente, se propone un ejercicio de cálculo con señales infinitas orientadas a ambos lados:

Ejemplo 4

Se pide calcular las siguientes convoluciones y representar gráficamente los resultados:

$$y_1(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) * \Pi\left(\frac{t}{T}\right) \quad (195)$$

$$y_2[n] = a^{|n|} * u[n] \quad (196)$$

siendo T una constante real ($T \in \mathbb{R}$) y a una constante compleja ($a \in \mathbb{C}$), con $T > 0$ y $|a| < 1$.

Solución

a) La primera convolución es entre una señal sinusoidal de amplitud 1 y periodo fundamental T (que, como toda señal periódica, es una señal infinita orientada a ambos lados) y un pulso cuadrado de ancho T (señal finita comprendida entre $t = -T/2$ y $t = T/2$):

$$y_1(t) = x_1(t) * x_2(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) * \Pi\left(\frac{t}{T}\right) \quad (197)$$

$$x_1(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \quad (198)$$

$$x_2(t) = \Pi\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1 & \text{para } t \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right] \\ 0 & \text{para } t \notin \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right] \end{cases} \quad (199)$$

Así, de acuerdo con (181), la señal resultando de esta convolución queda definida como sigue:

$$y_1(t) = \int_{-T/2}^{T/2} \Pi\left(\frac{\tau}{T}\right) \sin\left(\frac{2\pi}{T}(t - \tau)\right) d\tau \quad (200)$$

Resolvemos la integral:

$$\begin{aligned} \int_{-T/2}^{T/2} \Pi\left(\frac{\tau}{T}\right) \sin\left(\frac{2\pi}{T}(t - \tau)\right) d\tau &= \int_{-T/2}^{T/2} \sin\left(-\frac{2\pi}{T}\tau + \frac{2\pi}{T}t\right) d\tau = \\ &= \left[-\left(-\frac{2\pi}{T}\right) \cos\left(-\frac{2\pi}{T}\tau + \frac{2\pi}{T}t\right)\right]_{-T/2}^{T/2} = \\ &= \frac{2\pi}{T} \left(\cos\left(-\frac{2\pi}{T} \frac{T}{2} + \frac{2\pi}{T}t\right) - \cos\left(-\frac{2\pi}{T}\left(-\frac{T}{2}\right) + \frac{2\pi}{T}t\right)\right) = \\ &= \frac{2\pi}{T} \left(\cos\left(-\pi + \frac{2\pi}{T}t\right) - \cos\left(\pi + \frac{2\pi}{T}t\right)\right) = \frac{2\pi}{T} \left(-\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\right) = 0 \end{aligned} \quad (201)$$

Así pues, **el resultado de esta convolución es igual a 0**:

$$y_1(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) * \Pi\left(\frac{t}{T}\right) = 0 \quad (202)$$

Al ser $x_2(t)$ un pulso cuadrado de ancho igual al periodo fundamental de $x_1(t)$, independientemente del valor de t (es decir, independientemente del desplazamiento horizontal al que esté sometida $x_2(t)$), en la convolución siempre se calcula la integral definida de un periodo exacto de $x_1(t)$ (o, lo que es lo mismo, el *offset* de $x_1(t)$). Al ser $x_1(t)$ una señal sinusoidal de *offset* igual a 0, el resultado de la convolución es 0.

Comprobamos el resultado obtenido con MATLAB y representamos gráficamente las señales:

```
>> syms x1(t) x2(t) y1(t) T tau;
>> int(sin((2*pi)/T)*(t-tau)),tau,-T/2,T/2) % Integral del segundo tramo

ans =

0

>> T = 1; % Fijamos arbitrariamente T=1 para la representación gráfica
```

```
>> u(t) = piecewise(t<0,0,t>=0,1);
>> x1(t) = sin((2*pi/T)*t);
>> x2(t) = piecewise(t<(-T/2),0,(-T/2)<=t<=(T/2),1,t>(T/2),0);
>> y1(t) = 0;
>> figure;
>> fplot(x1(t),[-2*T,2*T]); % Representamos x1(t)
>> hold on;
>> fplot(x2(t),[-2*T,2*T]); % Representamos x2(t)
>> fplot(y1(t),[-2*T,2*T]); % Representamos y1(t)
>> axis([-2*T 2*T -1.1 2.1]);
>> grid on;
>> xlabel('t');
>> legend({'x_1(t)', 'x_2(t)', 'y_1(t)=x(t)*x(t)'}, 'Location', 'northeast');
```

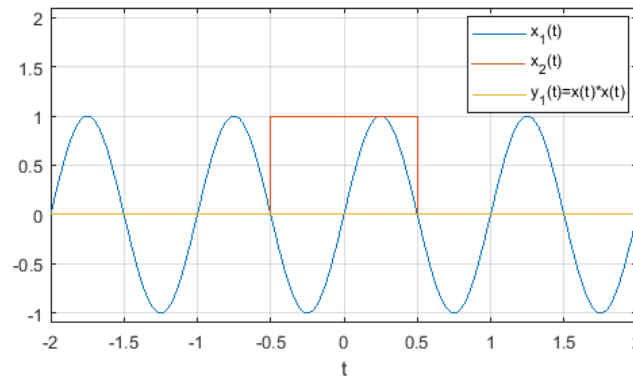


Figura 19. Representación gráfica de $x_1(t)$, $x_2(t)$ e $y_1(t)$, con $T = 2$.

b) La segunda convolución es entre una señal infinita orientada a ambos lados y un escalón unitario (señal infinita orientada a la derecha con inicio en la muestra $n = 0$):

$$y_2[n] = x_1[n] * x_2[n] = a^{|n|} * u[n] \quad (203)$$

$$x_1[n] = a^{|n|} = a^{-n} u[-n-1] + a^n u[n] = \begin{cases} a^{-n} & \text{para } n < 0 \\ a^n & \text{para } n \geq 0 \end{cases} \quad (204)$$

$$x_2[n] = u[n] = \begin{cases} 0 & \text{para } n < 0 \\ 1 & \text{para } n \geq 0 \end{cases} \quad (205)$$

Por tanto, **el resultado de esta convolución es una señal infinita orientada a ambos lados**. Sin embargo, en lugar de resolverla según (186), vamos a aplicar las propiedades de la convolución y a descomponerla en dos convoluciones, una entre dos señales infinitas de orientaciones opuestas, y otra entre dos señales infinitas orientadas a la derecha:

$$y_2[n] = a^{|n|} * u[n] = (a^{-n} u[-n-1] + a^n u[n]) * u[n] = \underbrace{(a^{-n} u[-n-1]) * u[n]}_{y_{21}[n]} + \underbrace{(a^n u[n]) * u[n]}_{y_{22}[n]} \quad (206)$$

La primera de estas dos convoluciones ($y_{21}[n]$) la planteamos por tramos tal y como se indica en la Figura 10 (dejamos «fijado» el escalón unitario $u[n]$, pues es la señal orientada a la derecha) y, de acuerdo con (118), da como resultado una señal infinita orientada a ambos lados que queda definida en los dos intervalos siguientes:

$$y_{21}[n] = \begin{cases} \sum_{m=0}^{+\infty} a^{-(n-m)} & \text{para } n < 0 \\ \sum_{m=n}^{+\infty} a^{-(n-m)} & \text{para } n \geq 0 \end{cases} \quad (207)$$

Resolvemos ambos sumatorios (son dos series geométricas convergentes, puesto que $|a| < 1$):

$$\sum_{m=0}^{+\infty} a^{-(n-m)} = a^{-n} \sum_{m=0}^{+\infty} a^m = a^{-n} \frac{a^0 - 0a}{1-a} = \frac{a^{-n}}{1-a} \quad (208)$$

$$\sum_{m=n}^{+\infty} a^{-(n-m)} = a^{-n} \sum_{m=0}^{+\infty} a^m = a^{-n} \frac{a^n - 0a}{1-a} = \frac{1}{1-a} \quad (209)$$

De este modo, obtenemos $y_{21}[n]$:

$$y_{21}[n] = \begin{cases} \frac{a^{-n}}{1-a} & \text{para } n < 0 \\ \frac{1}{1-a} & \text{para } n \geq 0 \end{cases} = \frac{a^{-n}}{1-a} u[-n-1] + \frac{1}{1-a} u[n] \quad (210)$$

Y, de hecho, la segunda de estas dos convoluciones ($y_{22}[n]$) ya la tenemos resuelta en la ecuación (143) del Ejemplo 2:

$$y_{22}[n] = (a^n u[n]) * u[n] = \left(\frac{1-a^{n+1}}{1-a} \right) u[n] \quad (211)$$

Así, el resultado definitivo de esta convolución se obtiene sustituyendo (210) y (211) en (206):

$$\begin{aligned} y_2[n] &= y_{21}[n] + y_{22}[n] = \frac{a^{-n}}{1-a} u[-n-1] + \frac{1}{1-a} u[n] + \left(\frac{1-a^{n+1}}{1-a} \right) u[n] = \\ &= \frac{a^{-n}}{1-a} u[-n-1] + \frac{2-a^{n+1}}{1-a} u[n] = \frac{1}{1-a} (a^{-n} u[-n-1] + (2-a^{n+1}) u[n]) \end{aligned} \quad (212)$$

Vemos, pues, que $y_2[n]$ es una señal cuya amplitud tiende asintóticamente a 0 para valores muy negativos de n y a $2/(1-a)$ para valores muy positivos de n (ver la Figura 20).

Comprobamos el resultado obtenido con MATLAB y representamos gráficamente las señales:

```
>> syms n m integer;
>> syms a complex; % Definimos a como variable simbólica compleja
>> assume(abs(a)<1); % Forzamos la condición de que |a|<1
>> symsum(a^(-(n-m)),m,0,+Inf) % Primer tramo de la primera convolución

ans =

-1/(a^n*(a - 1))

>> symsum(a^(-(n-m)),m,n,+Inf) % Segundo tramo de la primera convolución

ans =

-1/(a - 1)

>> assume(a,'clear'); % Eliminamos la condición forzada para la variable a
>> a = 1/2; % Fijamos arbitrariamente a=1/2 para la representación gráfica
>> n = -20:1:20;
>> u = zeros(size(n));
>> u(n>=0) = 1;
>> x1 = a.^abs(n);
>> x2 = u;
>> y2 = (1./(1-a)).*((a.^(-n)).*[u(end-1:-1:1) 0])+(2-a.^(n+1)).*u);
>> figure;
>> subplot(3,1,1);
>> stem(n,x1); % Representamos x1[n]
```

```
>> axis([n(1) n(end) -0.1 1.1]);
>> grid on;
>> xlabel('n');
>> legend('x_1[n]', 'Location', 'northwest');
>> subplot(3,1,2);
>> stem(n,x2); % Representamos x2[n]
>> axis([n(1) n(end) -0.1 1.1]);
>> grid on;
>> xlabel('n');
>> legend('x_2[n]', 'Location', 'northwest');
>> subplot(3,1,3);
>> stem(n,y2); % Representamos y2[n]
>> axis([n(1) n(end) -0.1 4.1]);
>> grid on;
>> xlabel('n');
>> legend('y_2[n]=x_1[n]*x_2[n]', 'Location', 'northwest');
```

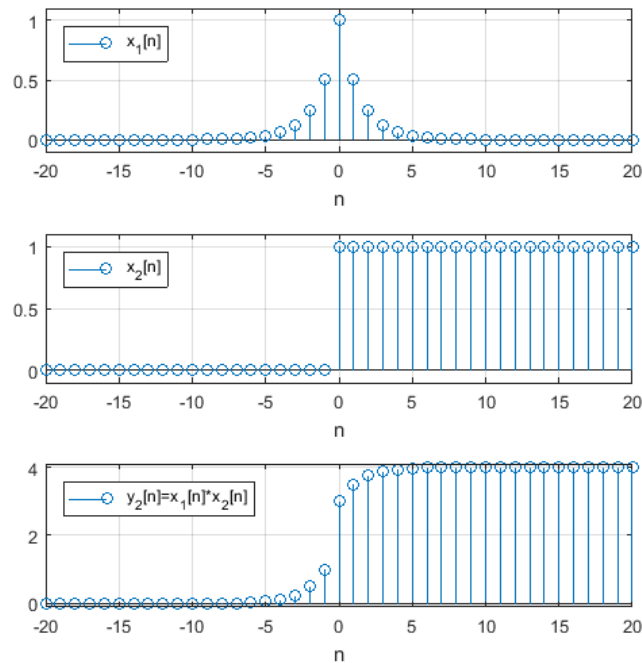


Figura 20. Representación gráfica de $x_1[n]$, $x_2[n]$ e $y_2[n]$, con $a = 1/2$.

2. Caracterización de sistemas LIT mediante su respuesta impulsional

En el apartado 1.1 de la sección anterior, se ha demostrado que la salida de todo sistema LIT ante cualquier señal de entrada puede calcularse como el resultado de la convolución entre dicha señal de entrada y la respuesta impulsional del sistema, lo cual permite concluir que la respuesta impulsional de un sistema LIT describe al sistema en su totalidad, permitiendo su completa caracterización.

Lo que esta conclusión implica es que **conocer la respuesta impulsional de un sistema LIT es equivalente a conocer la relación entrada-salida del sistema** (o sea, es equivalente a conocer el sistema mismo), puesto que, como ya vimos en el módulo anterior, aquello que describe y que permite caracterizar por completo un sistema es su relación entrada-salida. De este modo, conocer la respuesta impulsional en sistemas LIT se convierte en algo muy importante, pues ello permite:

1. **Conocer su salida ante cualquier señal de entrada:** en el apartado 2.1 trabajaremos esta cuestión (ya demostrada en la teoría desarrollada en la sección anterior) a partir de ejercicios prácticos.
2. **Conocer todas sus propiedades:** en el apartado 2.2 veremos que las propias características de su respuesta impulsional nos indicarán si un sistema LIT es o no causal, estable, con o sin memoria, etc.
3. **Conocer la respuesta impulsional del sistema LIT global resultante de la asociación de sistemas LIT:** en el apartado 2.3 modelizaremos las asociaciones en serie, en paralelo y en lazo de realimentación de sistemas LIT.

Finalmente, el apartado 2.4 está dedicado a continuar con la interpretación algebraica de la teoría de señales y sistemas: del mismo modo que ya sabemos que una señal no es sino un vector, ahora veremos cómo la operación convolución y la respuesta impulsional nos permiten equiparar cualquier sistema LIT a una matriz.

2.1. Cálculo de la salida en sistemas LIT

Como ya sabemos por las ecuaciones (7) y (12) deducidas en la sección anterior, un sistema LIT puede modelizarse indistintamente mediante una ecuación matemática (su relación entrada-salida) o mediante una señal concreta y específica (su respuesta impulsional).

A fin de ilustrar esta cuestión, en este apartado se propone un ejercicio de cálculo de la salida de varios sistemas LIT ante diferentes señales de entrada de dos maneras distintas, pero equivalentes entre sí: tanto directamente a partir de sus respectivas relaciones entrada-salida, como obteniendo primero sus respectivas respuestas impulsionales y calculando después dichas señales de salida mediante la convolución.

Ejemplo 5

Sean dos sistemas LIT S_1 y S_2 , el primero analógico, el segundo digital, cuyas relaciones entrada-salida son las siguientes:

$$y(t) = T_{S_1}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \quad (213)$$

$$y[n] = T_{S_2}\{x[n]\} = \frac{1}{2}x[n] + \frac{1}{2}x[n-1] \quad (214)$$

Se pide:

a) Obtener la salida de S_1 de dos formas distintas (a partir de su relación entrada-salida y a partir de su respuesta impulsional) cuando su entrada es:

- $x_1(t) = \Pi\left(t - \frac{1}{2}\right)$
- $x_2(t) = u(t)$
- $x_3(t) = e^{-t}u(t)$

b) Obtener la salida de S_2 de dos formas distintas (a partir de su relación entrada-salida y a partir de su respuesta impulsional), cuando su entrada es:

- $x_1[n] = u[n]$
- $x_2[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$
- $x_3[n] = \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)$

Solución

a) En primer lugar, constatamos que, en efecto, S_1 es un sistema LIT. Es un sistema lineal, ya que su salida ante una combinación lineal arbitraria de señales de entrada:

$$y(t) = T_{S_1}\left\{\sum_{i=1}^M a_i x_i(t)\right\} = \int_{-\infty}^t \left(\sum_{i=1}^M a_i x_i(\tau)\right) d\tau = \sum_{i=1}^M a_i \int_{-\infty}^t x_i(\tau) d\tau \quad (215)$$

coincide exactamente con la misma combinación lineal arbitraria de señales de salida del sistema ante cada una de las entradas individuales:

$$y_i(t) = T_{S_1}\{x_i(t)\} = \int_{-\infty}^t x_i(\tau) d\tau \Rightarrow y(t) = \sum_{i=1}^M a_i y_i(t) \quad (216)$$

Y es invariante en el tiempo, ya que su salida ante una señal cualquiera sometida a un desplazamiento horizontal arbitrario:

$$T_{S_1}\{x(t - t_0)\} = \int_{-\infty}^t x(\tau - t_0) d\tau = \left\{ \begin{array}{l} (\sigma = \tau - t_0) \\ \tau = \sigma + t_0 \\ d\tau = d(\sigma + t_0) = d\sigma \\ \tau = t \Rightarrow \sigma = t - t_0 \\ \tau \rightarrow -\infty \Rightarrow \sigma \rightarrow -\infty \end{array} \right\} = \int_{-\infty}^{t-t_0} x(\sigma) d\sigma \quad (217)$$

coincide con la salida del sistema ante esa misma señal sin desplazar sometida a ese mismo desplazamiento horizontal:

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \Rightarrow y(t - t_0) = \int_{-\infty}^{t-t_0} x^2(\tau) d\tau \Rightarrow y(t - t_0) = T_{S_1}\{x(t - t_0)\} \quad (218)$$

En segundo lugar, calculamos las salidas de S_1 ante las señales de entrada del enunciado:

$$y_1(t) = \int_{-\infty}^t \Pi\left(\tau - \frac{1}{2}\right) d\tau = \begin{cases} 0 & \text{para } t < 0 \\ \int_0^t d\tau & \text{para } 0 \leq t < 1 \\ \int_0^1 d\tau & \text{para } t \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{para } t < 0 \\ t & \text{para } 0 \leq t < 1 \\ 1 & \text{para } t \geq 1 \end{cases} \quad (219)$$

$$t(u(t) - u(t - 1)) + u(t - 1) = tu(t) + (1 - t)u(t - 1)$$

$$y_2(t) = \int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau = \begin{cases} 0 & \text{para } t < 0 \\ \int_0^t d\tau & \text{para } t \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{para } t < 0 \\ t & \text{para } t \geq 0 \end{cases} = tu(t) \quad (220)$$

$$y_3(t) = \int_{-\infty}^t e^{-\tau} u(\tau) d\tau = \begin{cases} 0 & \text{para } t < 0 \\ \int_0^t e^{-\tau} d\tau & \text{para } t \geq 0 \end{cases} = (1 - e^{-t})u(t) \quad (221)$$

En tercer lugar, calculamos la respuesta impulsional de S_1 :

$$h(t) = T_{S_1}\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = u(t) \quad (222)$$

Vemos que se trata de un **sistema LIT IIR**, pues su respuesta impulsional es de longitud infinita.

Y, finalmente, calculamos las salidas de S_1 ante las señales de entrada indicadas en el enunciado como el resultado de su convolución con la respuesta impulsional de S_1 y comprobamos que, en efecto, las señales de salida obtenidas son las mismas que en (219)-(221).

En el primer caso, la convolución es la misma que la planteada en (119), en el Ejemplo 2, solo que para $T = 1$ y con un desplazamiento horizontal aplicado a una de las señales (el pulso cuadrado). Así, podemos aprovechar el resultado expresado en (130), particularizándolo para $T = 1$ y atrasándolo 1/2 segundos:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \Pi\left(t - \frac{1}{2}\right) * u(t) = \\ &= \left(\left(t - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\right) \left(u\left(\left(t - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\right) - u\left(\left(t - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\right)\right) + 1u\left(\left(t - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\right) = \\ &= t(u(t) - u(t - 1)) + u(t - 1) = tu(t) + (1 - t)u(t - 1) \end{aligned} \quad (223)$$

En el segundo caso, la convolución es la misma que la planteada en (120), también en el Ejemplo 2, de modo que el resultado de la misma es el expresado en (136):

$$y_2(t) = u(t) * u(t) = tu(t) \quad (224)$$

Y, en el tercer caso, se trata de una convolución entre dos señales infinitas orientadas a la derecha. Por tanto, planteamos la convolución por tramos definida en la Figura 9 y, de acuerdo con la ecuación (113), vemos que el resultado de la misma es el siguiente:

$$y_3(t) = (e^{-t}u(t)) * u(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < 0 \\ \int_0^t e^{-\tau} d\tau & \text{para } t \geq 0 \end{cases} = (1 - e^{-t})u(t) \quad (225)$$

b) En primer lugar, constatamos que S_2 es también un sistema LIT. Es un sistema lineal, ya que su salida ante una combinación lineal arbitraria de señales de entrada:

$$y[n] = T_{S_2} \left\{ \sum_{i=1}^M a_i x_i[n] \right\} = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^M a_i x_i[n] \right) + \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^M a_i x_i[n-1] \right) = \sum_{i=1}^M a_i \left(\frac{1}{2} x_i[n] + \frac{1}{2} x_i[n-1] \right) \quad (226)$$

coincide exactamente con la misma combinación lineal arbitraria de señales de salida del sistema ante cada una de las entradas individuales:

$$y_i[n] = T_{S_2} \{x_i[n]\} = \frac{1}{2} x_i[n] + \frac{1}{2} x_i[n-1] \Rightarrow y[n] = \sum_{i=1}^M a_i y_i[n] \quad (227)$$

Y es invariante en el tiempo, ya que su salida ante una señal cualquiera sometida a un desplazamiento horizontal arbitrario:

$$T_{S_2} \{x[n - n_0]\} = \frac{1}{2} x[n - n_0] + \frac{1}{2} x[n - 1 - n_0] \quad (228)$$

coincide con la salida del sistema ante esa misma señal sin desplazar sometida a ese mismo desplazamiento horizontal:

$$y[n] = \frac{1}{2} x[n] + \frac{1}{2} x[n-1] \Rightarrow y[n - n_0] = \frac{1}{2} x[n - n_0] + \frac{1}{2} x[n - 1 - n_0] \Rightarrow y[n - n_0] = T_{S_2} \{x[n - n_0]\} \quad (229)$$

En segundo lugar, calculamos las salidas de S_2 ante las señales de entrada del enunciado:

$$y_1[n] = \frac{1}{2} u[n] + \frac{1}{2} u[n-1] = \frac{1}{2} \delta[n] + u[n-1] \quad (230)$$

$$y_2[n] = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^n u[n] + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} u[n-1] = \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} u[n] + \left(\frac{1}{2} \right)^n u[n-1] = \frac{1}{2} \delta[n] + \left(\frac{1}{2} \right)^{2n+1} u[n-1] \quad (231)$$

$$y_3[n] = \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}(n-1)\right) = \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}n - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) \quad (232)$$

En tercer lugar, calculamos la respuesta impulsional de S_2 :

$$h[n] = T_{S_2} \{\delta[n]\} = \frac{1}{2} \delta[n] + \frac{1}{2} \delta[n-1] \quad (233)$$

Vemos que se trata de un **sistema LIT FIR**, pues su respuesta impulsional es de longitud finita.

Y, finalmente, calculamos las salidas de S_2 ante las señales de entrada indicadas en el enunciado como el resultado de su convolución con la respuesta impulsional de S_2 y comprobamos que, en efecto, las señales de salida obtenidas son las mismas que en (230)-(232). Al ser la respuesta impulsional de S_2 la combinación lineal de dos deltas discretas, calculamos las convoluciones aplicando la propiedad de las señales delta expresada en la ecuación (48):

$$y_1[n] = u[n] * \left(\frac{1}{2} \delta[n] + \frac{1}{2} \delta[n-1] \right) = \frac{1}{2} u[n] + \frac{1}{2} u[n-1] = \frac{1}{2} \delta[n] + u[n-1] \quad (234)$$

$$y_2[n] = \left(\left(\frac{1}{2} \right)^n u[n] \right) * \left(\frac{1}{2} \delta[n] + \frac{1}{2} \delta[n-1] \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^n u[n] + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} u[n-1] =$$

$$\left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} u[n] + \left(\frac{1}{2} \right)^n u[n-1] = \frac{1}{2} \delta[n] + \left(\frac{1}{2} \right)^{2n+1} u[n-1] \quad (235)$$

$$y_3[n] = \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) * \left(\frac{1}{2} \delta[n] + \frac{1}{2} \delta[n-1] \right) = \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}(n-1)\right) =$$

$$\frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}n - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) \quad (236)$$

2.2. Propiedades de los sistemas LIT

Una de las consecuencias más relevantes del hecho de que la respuesta impulsional de cualquier sistema LIT permita caracterizar al sistema en su totalidad es que las propiedades de dicho sistema (causalidad, estabilidad, etc.) quedan «inscritas» en la forma de su respuesta impulsional. Dicho de otro modo: del mismo modo que, como acabamos de ver en el apartado anterior, podemos usar la respuesta impulsional de un sistema LIT, en lugar de su relación entrada-salida, para calcular su salida ante cualquier entrada, también podemos deducir las propiedades que posee o no el sistema a partir de su respuesta impulsional, en lugar de hacerlo a partir de su relación entrada-salida.

Como ya vimos al final del módulo anterior, en general, no es posible determinar las propiedades que posee un sistema «caja negra» si lo único que conocemos del mismo son sus salidas ante un ciertas señales de entrada. Este conocimiento parcial del comportamiento del sistema únicamente permite observar si dicho comportamiento conocido es compatible (o sea, si no entra en contradicción) con el cumplimiento de alguna propiedad, o bien, y en el mejor de los casos, demostrar que el sistema no posee alguna propiedad (en caso de que el comportamiento conocido del sistema sí entre en contradicción con dicha propiedad).

Ahora bien, **si se sabe de antemano que un sistema es LIT, conocer su salida ante una señal delta (es decir, conocer su respuesta impulsional) no es un conocimiento parcial del comportamiento del sistema, sino que resulta ser un conocimiento total del mismo: nos permite saberlo todo acerca de dicho sistema.**

A continuación, vamos a ver qué rasgos característicos de la respuesta impulsional de un sistema LIT son los que permiten determinar las diferentes propiedades del sistema.

2.2.1. Causalidad en sistemas LIT

Recordemos que la propiedad de causalidad de un sistema es su capacidad de calcular su salida usando exclusivamente información presente y/o pasada de su entrada. Así pues:

Un sistema LIT S es causal si y solo si su respuesta impulsional es igual a 0 para todo valor negativo de la variable independiente (ver Demostración 8):

$$S \text{ es sistema LIT analógico causal} \Leftrightarrow h(t) = T_S\{\delta(t)\} = 0, \forall t < 0 \quad (237)$$

$$S \text{ es sistema LIT digital causal} \Leftrightarrow h[n] = T_S\{\delta[n]\} = 0, \forall n < 0 \quad (238)$$

Por tanto, S será **no causal** si y solo si su respuesta impulsional es diferente de 0 para algún valor negativo de la variable independiente:

$$S \text{ es sistema LIT analógico no causal} \Leftrightarrow \exists t_0 < 0: h(t_0) = T_S\{\delta(t_0)\} \neq 0 \quad (239)$$

$$S \text{ es sistema LIT digital no causal} \Leftrightarrow \exists n_0 < 0: h[n_0] = T_S\{\delta[n_0]\} \neq 0 \quad (240)$$

Y, también, S será **anticausal** si y solo si es no causal y su respuesta impulsional es igual a 0 para todo valor no negativo de la variable independiente:

$$S \text{ es sistema LIT analógico anticausal} \Leftrightarrow \begin{cases} \exists t_0 < 0: h(t_0) = T_S\{\delta(t_0)\} \neq 0 \\ h(t) = T_S\{\delta(t)\} = 0, \forall t \geq 0 \end{cases} \quad (241)$$

$$S \text{ es sistema LIT digital anticausal} \Leftrightarrow \begin{cases} \exists n_0 < 0: h[n_0] = T_S\{\delta[n_0]\} \neq 0 \\ h[n] = T_S\{\delta[n]\} = 0, \forall n \geq 0 \end{cases} \quad (242)$$

Demostración 8

Hacemos la demostración para el caso analógico. Sean S un sistema LIT analógico, $x(t)$ su señal de entrada, $y(t)$ su señal de salida y $h(t)$ su respuesta impulsional:

$$y(t) = x(t) * h(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \quad (243)$$

Si S es causal, el cálculo de $y(t_0)$ no depende de $x(t)$ para valores de $t > t_0$, $\forall t_0 \in \mathbb{R}$:

$$y(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t_0-\tau)d\tau = \int_0^{+\infty} h(\tau)x(t_0-\tau)d\tau \Rightarrow h(\tau) = 0, \forall \tau < 0 \quad (244)$$

Y, por lo que respecta al otro sentido de la implicación, si $h(t) = 0, \forall t < 0$, entonces:

$$y(t) = \int_0^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \Rightarrow y(t_0) = \int_0^{+\infty} h(\tau)x(t_0-\tau)d\tau, \forall t_0 \in \mathbb{R} \quad (245)$$

Con razonamientos similares, se demuestran fácilmente los casos en que S es no causal y anticausal. Y la demostración para el caso digital es análoga y queda propuesta como ejercicio.

Así pues, y a modo de ejemplo ilustrativo, los sistemas S_1 y S_2 del Ejemplo 5 son causales, pues se observa claramente en las ecuaciones (222) y (233) que sus respuestas impulsionales cumplen con el criterio establecido en (237) y (238).

2.2.2. Estabilidad en sistemas LIT

Recordemos que la propiedad de estabilidad de un sistema es su capacidad de garantizar que su salida estará acotada en amplitud siempre que también lo esté su entrada. Así pues:

Un sistema LIT S es estable si y solo si su respuesta impulsional es absolutamente integrable/sumable (ver Demostración 9):

$$S \text{ es sistema LIT analógico estable} \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt \leq A \quad (246)$$

$$S \text{ es sistema LIT digital estable} \Leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| \leq A \quad (247)$$

siendo A un valor real finito ($A \in \mathbb{R}$).

En general, **todo sistema LIT FIR es estable**, pues, si la respuesta impulsional es una señal de longitud finita, las sumas de (246) y (247) siempre convergirán.

Demostración 9

Hacemos la demostración para el caso digital. Sean S un sistema LIT digital, $x[n]$ su señal de entrada, $y[n]$ su señal de salida y $h[n]$ su respuesta impulsional:

$$y[n] = x[n] * h[n] = h[n] * x[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h[m]x[n-m] \quad (248)$$

Si S es estable, $y[n]$ estará acotada en amplitud siempre que $x[n]$ también lo esté:

$$|x[n]| \leq A \Rightarrow |y[n]| \leq B \quad (249)$$

siendo A y B valores reales finitos ($A, B \in \mathbb{R}$). Y ello implica que la respuesta impulsional de S es absolutamente sumable:

$$\begin{aligned} |y[n]| &= \left| \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h[m]x[n-m] \right| \leq \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |h[m]x[n-m]| = \\ &\sum_{m=-\infty}^{+\infty} |h[m]| |x[n-m]| \leq \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |h[m]| A = \\ &A \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |h[m]| \leq B \Rightarrow \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |h[m]| \leq \frac{B}{A} \end{aligned} \quad (250)$$

Y, por lo que respecta al otro sentido de la implicación, si la respuesta impulsional de S es absolutamente sumable y $x[n]$ está acotada en amplitud, entonces $y[n]$ también lo estará:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| \leq B \Rightarrow |y[n]| = \left| \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h[m]x[n-m] \right| \leq \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |h[m]| |x[n-m]| \leq \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |h[m]| A = A \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |h[m]| \leq A \cdot B \quad (251)$$

siendo A y B valores reales finitos ($A, B \in \mathbb{R}$).

La demostración para el caso analógico es análoga y queda propuesta como ejercicio.

Así pues, y a modo de ejemplo ilustrativo, el sistema S_1 del Ejemplo 5 es inestable, mientras que el sistema S_2 de ese mismo ejercicio es estable (pues, recordemos, se trata de un sistema LIT FIR).

2.2.3. Memoria en sistemas LIT

Recordemos que la memoria de un sistema es su capacidad de usar información pasada de su entrada para calcular su salida. Así pues:

Un sistema LIT S tiene memoria si y solo si su respuesta impulsional es diferente de 0 para algún valor positivo de la variable independiente (ver Demostración 10):

$$S \text{ es sistema LIT analógico con memoria} \Leftrightarrow \exists t_0 > 0: h(t_0) = T_S\{\delta(t_0)\} \neq 0 \quad (252)$$

$$S \text{ es sistema LIT digital con memoria} \Leftrightarrow \exists n_0 > 0: h[n_0] = T_S\{\delta[n_0]\} \neq 0 \quad (253)$$

Asimismo, **la memoria de S será el máximo valor positivo t_0 , o n_0 , para el cual su respuesta impulsional es diferente de 0:**

$$\text{Memoria de } S = \max\{t_0 > 0: h(t_0) \neq 0\} \quad (254)$$

$$\text{Memoria de } S = \max\{n_0 > 0: h[n_0] \neq 0\} \quad (255)$$

allí donde S es un sistema LIT analógico en (254) y su memoria es de t_0 segundos, y donde S es un sistema LIT digital en (255) y su memoria es de n_0 muestras.

Por tanto, S será un **sistema instantáneo** si y solo si su respuesta impulsional es igual a 0 para todo valor de la variable independiente distinto de 0:

$$S \text{ es sistema LIT analógico instantáneo} \Leftrightarrow h(t) = T_S\{\delta(t)\} = 0, \forall t \neq 0 \quad (256)$$

$$S \text{ es sistema LIT digital instantáneo} \Leftrightarrow h[n] = T_S\{\delta[n]\} = 0, \forall n \neq 0 \quad (257)$$

En general, **todo sistema LIT FIR no anticausal tiene memoria finita o es instantáneo**, mientras que **todo sistema LIT IIR causal tiene memoria infinita**.

Demostración 10

Hacemos la demostración para el caso analógico. Sean S un sistema LIT analógico, $x(t)$ su señal de entrada, $y(t)$ su señal de salida y $h(t)$ su respuesta impulsional:

$$y(t) = x(t) * h(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \quad (258)$$

Si S tiene una memoria de t_0 segundos, el cálculo de $y(t)$ depende de $x(t-t_0)$, con $t_0 > 0$, y no depende de $x(t-t_1)$, $\forall t_1 > t_0$:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t_0} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \Rightarrow \begin{cases} h(\tau) = 0, \forall \tau > t_0 \\ h(t_0) \neq 0 \end{cases} \quad (259)$$

Por lo que respecta al otro sentido de la implicación, si $h(t_0) \neq 0$ y $h(t) = 0, \forall t > t_0$, con $t_0 > 0$, entonces:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t_0} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \quad (260)$$

Y, así, el cálculo de $y(t)$ depende de $x(t-t_0)$, con $t_0 > 0$, y no depende de $x(t-t_1)$, $\forall t_1 > t_0$. La demostración para el caso digital es análoga y queda propuesta como ejercicio.

Así pues, y a modo de ejemplo ilustrativo, el sistema S_1 del Ejemplo 5 (que es un sistema LIT IIR causal) tiene memoria infinita, mientras que el sistema S_2 de ese mismo ejercicio (que es un sistema LIT FIR causal) tiene memoria de 1 muestra.

2.2.4. Invertibilidad en sistemas LIT

Recordemos que la propiedad de invertibilidad de un sistema es su capacidad de ser anulado por otro sistema.

En primer lugar, conviene aclarar que **si un sistema LIT es invertible, su sistema inverso también es LIT**. Consideremos por un momento un sistema LIT S_1 invertible cualquiera y su sistema inverso, al cual denominaremos S_2 . Ante cualquier señal presente en la entrada de S_1 , la asociación serie que conecta la salida de S_1 a la entrada de S_2 genera en la salida de S_2 una señal igual a la señal de entrada de S_1 . Por tanto:

$$T_{S_2} \{T_{S_1} \{x(t)\}\} = x(t), \forall x(t) \quad (261)$$

$$T_{S_2} \{T_{S_1} \{x[n]\}\} = x[n], \forall x[n] \quad (262)$$

Entonces, puesto que S_1 es lineal, preserva en su salida cualquier combinación lineal de señales que se presente en su entrada. Así, S_2 ha de preservar también en su salida cualquier combinación lineal de señales que se presente en su entrada, puesto que, ante cualquier combinación lineal de señales que haya en la salida de S_1 , S_2 ha de generar en su salida la combinación lineal de señales presente en la entrada de S_1 : si S_1 , por ser lineal, ha preservado la combinación lineal de señales individuales en un sentido, S_2 ha de hacer lo propio en sentido opuesto. O sea, S_2 también ha de ser lineal.

Y, puesto que S_1 es invariante en el tiempo, su comportamiento no cambia con el paso del tiempo. Claro, al ser su sistema inverso, S_2 implementa las operaciones inversas a las operaciones que implementa S_1 : si las operaciones que implementa S_1 no cambian con el paso del tiempo, sus inversas, que son las que implementa S_2 , tampoco lo hacen. O sea, S_2 también ha de ser invariante en el tiempo. Así pues:

$$T_{S_2} \{T_{S_1} \{x(t)\}\} = x(t), \forall x(t) \Rightarrow (x(t) * h_1(t)) * h_2(t) = x(t), \forall x(t) \quad (263)$$

$$T_{S_2} \{T_{S_1} \{x[n]\}\} = x[n], \forall x[n] \Rightarrow (x[n] * h_1[n]) * h_2[n] = x[n], \forall x[n] \quad (264)$$

siendo S_1 y S_2 sistemas LIT analógicos en (263), cuyas respectivas respuestas impulsionales son $h_1(t)$ y $h_2(t)$, y siendo S_1 y S_2 sistemas LIT digitales en (264), cuyas respectivas respuestas impulsionales son $h_1[n]$ y $h_2[n]$.

Además, puesto que la convolución posee las propiedades conmutativa y asociativa, **S_2 es el sistema LIT inverso de S_1 y S_1 es el sistema LIT inverso de S_2 :**

$$(x(t) * h_1(t)) * h_2(t) = (x(t) * h_2(t)) * h_1(t) = x(t) * h_1(t) * h_2(t) = x(t) \quad (265)$$

$$(x[n] * h_1[n]) * h_2[n] = (x[n] * h_2[n]) * h_1[n] = x[n] * h_1[n] * h_2[n] = x[n] \quad (266)$$

Aclarado todo esto, ya podemos afirmar lo siguiente:

Un sistema LIT S_1 es invertible si y solo si existe otro sistema LIT S_2 tal que la convolución entre las respuestas impulsionales de ambos sistemas es igual a una señal delta, y viceversa (ver Demostración 11):

$$\boxed{S_1 \text{ y } S_2 \text{ son sistemas LIT analógicos inversos} \Leftrightarrow h_1(t) * h_2(t) = \delta(t)} \quad (267)$$

$$\boxed{S_1 \text{ y } S_2 \text{ son sistemas LIT digitales inversos} \Leftrightarrow h_1[n] * h_2[n] = \delta[n]} \quad (268)$$

siendo $h_1(t)$ y $h_2(t)$ las respuestas impulsionales de S_1 y S_2 , respectivamente, en (267), y $h_1[n]$ y $h_2[n]$ las respuestas impulsionales de S_1 y S_2 , respectivamente, en (268).

Demostración 11

Demostramos el caso digital (y el caso analógico es análogo y queda propuesto como ejercicio). Sean S_1 y S_2 dos sistemas LIT digitales, y $h_1[n]$ y $h_2[n]$ sus respectivas respuestas impulsionales.

En primer lugar, si S_1 y S_2 son sistemas inversos:

$$x[n] * \underbrace{h_1[n] * h_2[n]}_{h[n]} = x[n] \Rightarrow \underbrace{h[n]}_{x[n] * \delta[n] = x[n]} = \delta[n] \Rightarrow h_1[n] * h_2[n] = \delta[n] \quad (269)$$

Y, en segundo lugar, si la convolución entre $h_1[n]$ y $h_2[n]$ es una señal delta:

$$h_1[n] * h_2[n] = \delta[n] \Rightarrow x[n] * \underbrace{h_1[n] * h_2[n]}_{\delta[n]} = x[n] * \delta[n] = x[n] \quad (270)$$

Conviene notar que, trabajando en el dominio del tiempo (como es nuestro caso en este módulo), no existe un método sistemático que permita calcular la respuesta impulsional S_1 a partir de la de S_2 , o viceversa. Es decir, que **la operación convolución no tiene operación inversa en el dominio del tiempo** (como la resta lo es de la suma, o la división lo es del producto). Así, dada la respuesta impulsional de un sistema LIT, obtener la respuesta impulsional de su sistema inverso no es algo trivial (insistimos, trabajando en el dominio del tiempo). En módulos posteriores, veremos que, al abandonar el dominio del tiempo y pasar a trabajar en dominios transformados (por ejemplo, con la Transformada de Laplace para señales analógicas, o con la Transformada z para señales digitales) esta dificultad con la que hemos topado aquí desaparece y «deshacer» la operación convolución será sumamente fácil (puesto que en estos dominios transformados la convolución de señales se transformará en un producto de polinomios).

2.3. Asociación de sistemas LIT

Como continuación directa de las propiedades de la convolución demostradas en el apartado 1.2 y de las propiedades de los sistemas LIT estudiadas en el apartado anterior, seguidamente vamos a ver cómo modelizar los sistemas globales resultantes de asociar sistemas LIT en serie, en paralelo, en lazo de realimentación, o en configuraciones híbridas (en las que se combinen varias de las anteriores).

2.3.1. Asociación de sistemas LIT en serie

El sistema global S resultante de la asociación de N sistemas LIT en serie (S_1, S_2, \dots, S_N), tal y como se muestra en la Figura 21, posee las siguientes propiedades:

- S es un sistema LIT cuya respuesta impulsional es el resultado de la convolución de las respuestas impulsionales de S_1, S_2, \dots, S_N :

$$h(t) = h_1(t) * h_2(t) * \dots * h_N(t) \quad (271)$$

$$h[n] = h_1[n] * h_2[n] * \dots * h_N[n] \quad (272)$$

siendo $h(t)$, o $h[n]$, la respuesta impulsional de S , y $h_i(t)$, o $h_i[n]$, la respuesta impulsional de S_i , respectivamente, en (271) y (272), y con $N \in \mathbb{Z}$ y $N \geq 2$.

- S es independiente del orden en que S_1, S_2, \dots, S_N se asocien en serie, puesto que, como consecuencia directa de las propiedades conmutativa y asociativa de la convolución, los resultados de las operaciones expresadas en (271) y (272) son insensibles a cualquier modificación de la posición de las diferentes $h_i(t)$, o $h_i[n]$, y del orden de cálculo de las diferentes convoluciones implicadas.

En términos de representación gráfica, estas conclusiones se traducen en lo siguiente:

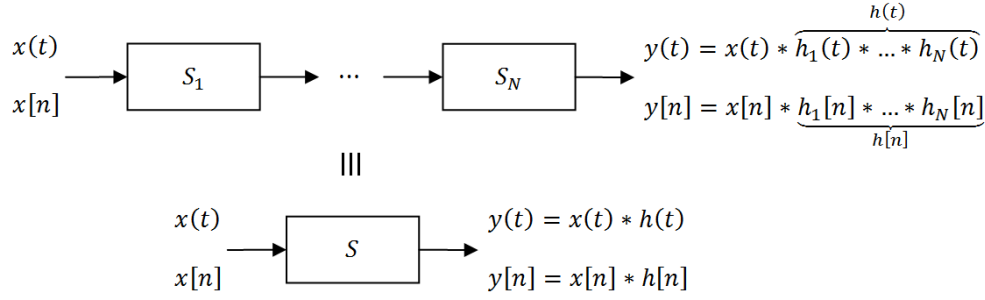


Figura 21. Sistema LIT S resultante de la asociación en serie de N sistemas LIT (S_1, S_2, \dots, S_N) .

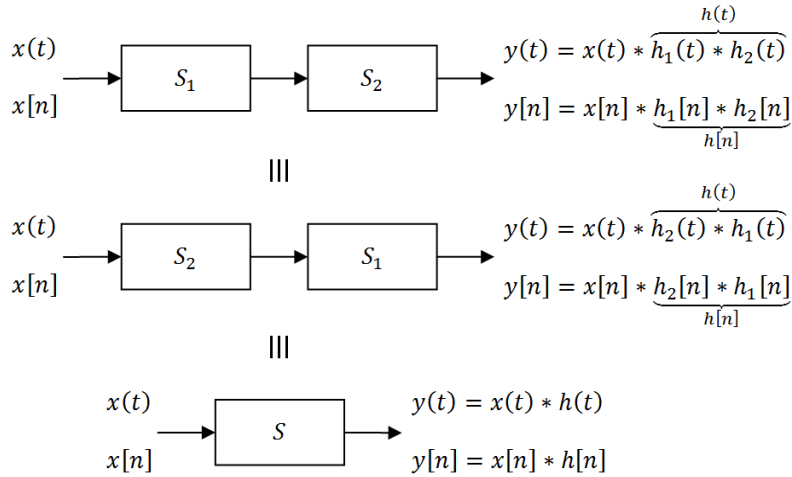


Figura 22. El resultado de la asociación en serie de sistemas LIT es independiente del orden en la asociación.

2.3.2. Asociación de sistemas LIT en paralelo

El sistema global S resultante de la asociación de N sistemas LIT en paralelo (S_1, S_2, \dots, S_N) es un sistema LIT cuya respuesta impulsional es el resultado de la suma de las respuestas impulsionales S_1, S_2, \dots, S_N :

$$h(t) = \sum_{i=1}^N h_i(t) = h_1(t) + h_2(t) + \dots + h_N(t) \quad (273)$$

$$h[n] = \sum_{i=1}^N h_i[n] = h_1[n] + h_2[n] + \dots + h_N[n] \quad (274)$$

siendo $h(t)$, o $h[n]$, la respuesta impulsional de S , y $h_i(t)$, o $h_i[n]$, la respuesta impulsional de S_i , respectivamente, en (273) y (274), y con $N \in \mathbb{Z}$ y $N \geq 2$.

Este resultado es consecuencia directa de la propiedad distributiva respecto de la suma de la convolución aplicada sobre la asociación en paralelo de sistemas LIT mostrada en la Figura 23:

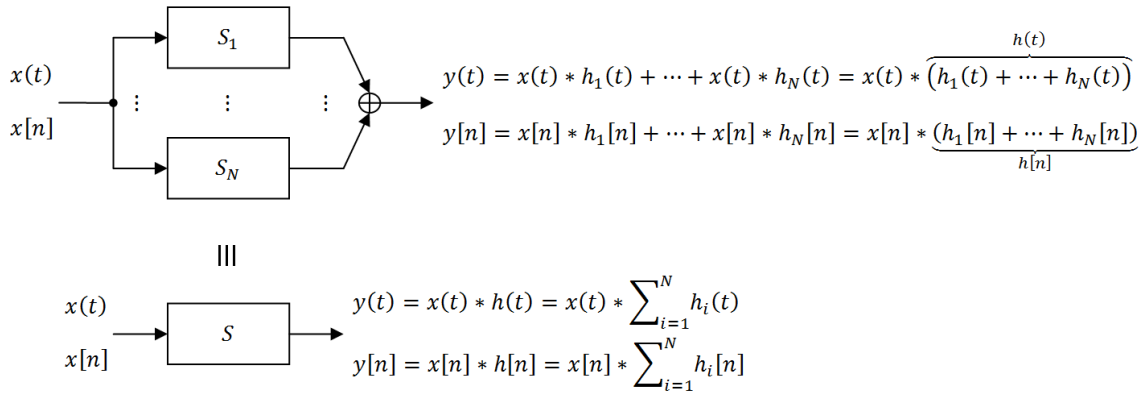


Figura 23. Sistema LIT S resultante de la asociación en paralelo de N sistemas LIT (S_1, S_2, \dots, S_N) .

2.3.3. Asociación de sistemas LIT en lazo de realimentación

La asociación de dos sistemas LIT S_1 y S_2 en lazo de realimentación, tal y como se muestra en la Figura 24, da como resultado un sistema global S que también es LIT.

Ahora bien, obtener la respuesta impulsional de S a partir de las repuestas impulsionales de S_1 y S_2 ya no es algo tan trivial como en las asociaciones en serie y en paralelo. O, al menos, no lo será mientras trabajemos en el dominio del tiempo.

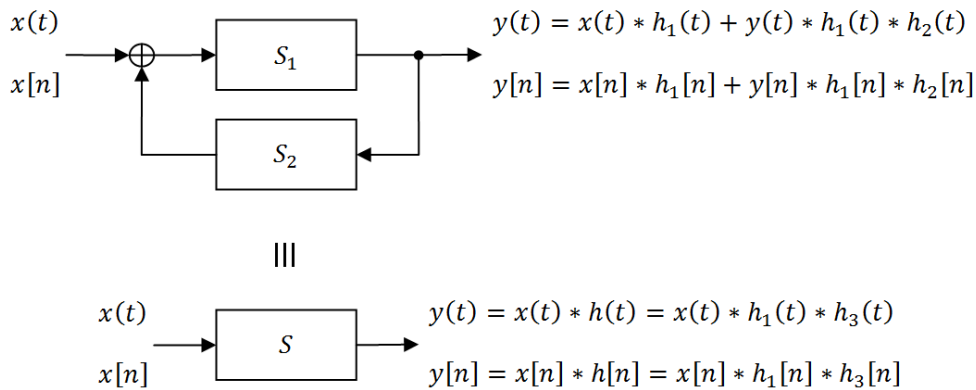


Figura 24. Sistema LIT S resultante de la asociación en lazo de realimentación de dos sistemas LIT S_1 y S_2 .

Así, siendo $h(t)$, o $h[n]$, la respuesta impulsional de S , y $h_1(t)$ y $h_2(t)$, o $h_1[n]$ y $h_2[n]$, las respuestas impulsionales de S_1 y S_2 , respectivamente, vemos que la salida de S es la salida de S_1 ante la suma de la señal de entrada de S más la salida de S_2 ante la señal de salida de S (que es la señal realimentada):

$$y(t) = T_S\{x(t)\} = T_{S_1}\{x(t) + T_{S_2}\{y(t)\}\} = (x(t) + (y(t) * h_2(t))) * h_1(t) =$$

$$x(t) * h_1(t) + y(t) * h_1(t) * h_2(t) \quad (275)$$

$$y[n] = T_S\{x[n]\} = T_{S_1}\{x[n] + T_{S_2}\{y[n]\}\} = (x[n] + (y[n] * h_2[n])) * h_1[n] =$$

$$x[n] * h_1[n] + y[n] * h_1[n] * h_2[n] \quad (276)$$

Aislado $y(t)$ e $y[n]$, se obtiene que:

$$\begin{aligned}
 y(t) - y(t) * h_1(t) * h_2(t) &= x(t) * h_1(t) \\
 y(t) * (\delta(t) - h_1(t) * h_2(t)) &= x(t) * h_1(t) \\
 y(t) * \underbrace{(\delta(t) - h_1(t) * h_2(t))}_{\delta(t)} * \underbrace{h_3(t)}_{h(t)} &= x(t) * \underbrace{h_1(t) * h_3(t)}_{h(t)}
 \end{aligned} \tag{277}$$

$$\begin{aligned}
 y[n] &= x[n] * h_1[n] + y[n] * h_1[n] * h_2[n] \\
 y[n] * (\delta[n] - h_1[n] * h_2[n]) &= x[n] * h_1[n] \\
 y[n] * \underbrace{(\delta[n] - h_1[n] * h_2[n])}_{\delta[n]} * \underbrace{h_3[n]}_{h[n]} &= x[n] * \underbrace{h_1[n] * h_3[n]}_{h[n]}
 \end{aligned} \tag{278}$$

allí donde $h_3(t)$, o $h_3[n]$, es una señal tal que:

$$h_3(t) * \underbrace{(\delta(t) - h_1(t) * h_2(t))}_{h'_3(t)} = \delta(t) \Rightarrow h_3(t) * h'_3(t) = \delta(t) \tag{279}$$

$$h_3[n] * \underbrace{(\delta[n] - h_1[n] * h_2[n])}_{h'_3[n]} = \delta[n] \Rightarrow h_3[n] * h'_3[n] = \delta[n] \tag{280}$$

Es decir, que **la respuesta impulsional de S es el resultado de la convolución entre la respuesta impulsional de S_1 y la respuesta impulsional del sistema LIT inverso al sistema LIT cuya respuesta impulsional fuese $h'_3(t)$, o $h'_3[n]$** :

$$h(t) = h_1(t) * h_3(t) \tag{281}$$

$$h[n] = h_1[n] * h_3[n] \tag{282}$$

Y, como ya hemos visto al estudiar la invertibilidad en sistemas LIT (en el apartado 2.2.4 de este mismo módulo), no hay ningún método sistemático que, trabajando en el dominio del tiempo, nos permita calcular la respuesta impulsional del sistema LIT inverso a otro sistema LIT a partir de la respuesta impulsional de este.

Será en módulos posteriores donde, gracias a la Transformada de Laplace para señales analógicas, o a la Transformada z para señales digitales, podremos caracterizar más fácilmente el sistema LIT resultante de la asociación en lazo de realimentación de dos sistemas LIT.

2.3.4. Asociaciones de sistemas LIT híbridas

Los sistemas LIT pueden asociarse combinando arbitrariamente estas formas de asociación básicas: en serie, en paralelo y en lazo de realimentación. Cuando esto ocurre, obtener la respuesta impulsional del sistema LIT global resultante de una asociación híbrida de este estilo pasa por combinar las caracterizaciones correspondientes a cada una de las formas de asociación básicas que acabamos de estudiar.

En este sentido, a continuación se propone un ejercicio de caracterización del sistema LIT resultante de la asociación híbrida de varios sistemas LIT.

Ejemplo 6

Sea la siguiente asociación híbrida de cuatro sistemas LIT digitales:

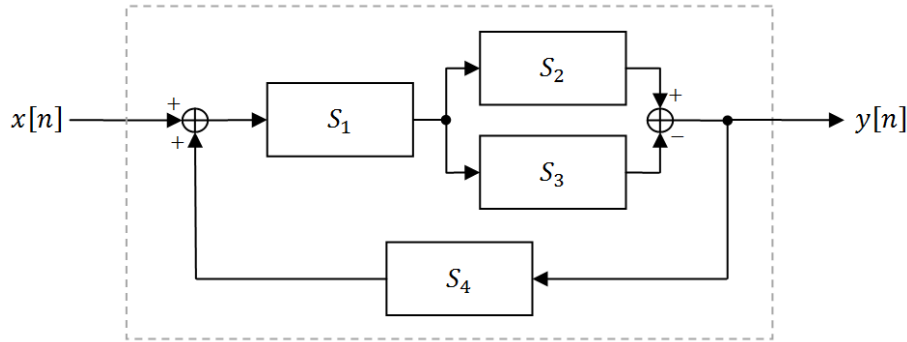


Figura 25. Asociación de los sistemas S_1 , S_2 , S_3 y S_4 .

allí donde las respuestas impulsionales de S_1 , S_2 , S_3 y S_4 son, respectivamente, las siguientes:

$$h_1[n] = \cos(\pi n) u[n] \quad (283)$$

$$h_2[n] = \delta[n] - \frac{1}{2} \delta[n - 2] \quad (284)$$

$$h_3[n] = -\frac{1}{2} \delta[n - 1] \quad (285)$$

$$h_4[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n - 1] \quad (286)$$

Se pide obtener la respuesta impulsional del sistema global S resultante de la asociación y determinar sus propiedades.

Solución

Puesto que los cuatro sistemas son LIT y puesto que la asociación híbrida llevada a cabo combina una asociación en paralelo (S_2 y S_3), una asociación en serie (S_1 con el paralelo de S_2 y S_3) y un lazo de realimentación (S_4 realimenta la salida de la asociación de S_1 , S_2 y S_3 a la entrada de esa misma asociación), el sistema global S también será un sistema LIT. Por tanto, una vez hallemos la respuesta impulsional de S ($h[n]$), será fácil determinar cuáles son sus propiedades.

Entonces, para simplificar las cosas, vamos a calcular la respuesta impulsional del sistema LIT resultante de la asociación de S_1 , S_2 y S_3 , que denominamos $h_5[n]$:

$$\begin{aligned} h_5[n] &= h_1[n] * (h_2[n] - h_3[n]) = \\ &= (\cos(\pi n) u[n]) * \left(\delta[n] - \frac{1}{2} \delta[n - 2] + \frac{1}{2} \delta[n - 1] \right) = \\ &= \cos(\pi n) u[n] + \frac{1}{2} \cos(\pi n - \pi) u[n - 1] - \frac{1}{2} \cos(\pi n - 2\pi) u[n - 2] = \\ &= \cos(\pi n) u[n] - \frac{1}{2} \cos(\pi n) u[n - 1] - \frac{1}{2} \cos(\pi n) u[n - 2] = \\ &= \cos(\pi n) \left(u[n] - \frac{1}{2} u[n - 1] - \frac{1}{2} u[n - 2] \right) = \\ &= \cos(\pi n) \left(\delta[n] + \frac{1}{2} \delta[n - 1] \right) = \delta[n] - \frac{1}{2} \delta[n - 1] \end{aligned} \quad (287)$$

Así, ahora ya podemos aplicar la ecuación (282) para caracterizar la respuesta impulsional del sistema LIT global S :

$$h[n] = h_5[n] * h_6[n] \quad (288)$$

allí donde, de acuerdo con (280), la señal $h_6[n]$ es:

$$h_6[n] * \underbrace{(\delta[n] - h_5[n] * h_4[n])}_{h'_6[n]} = \delta[n] \Rightarrow h_6[n] * h'_6[n] = \delta[n] \quad (289)$$

Calculamos $h'_6[n]$, que sería la respuesta impulsional del sistema LIT inverso al sistema LIT que tuviese por respuesta impulsional a $h_6[n]$:

$$\begin{aligned} h'_6[n] &= \delta[n] - h_5[n] * h_4[n] = \delta[n] - \left(\delta[n] - \frac{1}{2} \delta[n-1] \right) * \left(\left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} u[n-1] \right) = \\ &= \delta[n] - \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} u[n-1] - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-2} u[n-2] = \\ &= \delta[n] - \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} (u[n-1] - u[n-2]) = \delta[n] - \delta[n-1] \end{aligned} \quad (290)$$

Calculamos ahora $h_6[n]$ aplicando en (289) la expresión hallada para $h'_6[n]$ en (290):

$$h_6[n] * (\delta[n] - \delta[n-1]) = \delta[n] \Rightarrow h_6[n] - h_6[n-1] = \delta[n] \Rightarrow h_6[n] = u[n] \quad (291)$$

Y, finalmente, ya podemos calcular la respuesta impulsional del sistema LIT global S desde (288):

$$\begin{aligned} h[n] &= h_5[n] * h_6[n] = \left(\delta[n] - \frac{1}{2} \delta[n-1] \right) * u[n] = u[n] - \frac{1}{2} u[n-1] \\ h[n] &= \delta[n] + \frac{1}{2} u[n-1] \end{aligned} \quad (292)$$

Entonces, respecto de las propiedades de S , vemos, atendiendo a su respuesta impulsional, que:

- S es un sistema LIT causal, puesto que su respuesta impulsional es igual a 0 para todo valor negativo de la variable independiente:

$$h[n] = 0, \forall n < 0 \quad (293)$$

- S es un sistema LIT inestable, puesto que su respuesta impulsional no es absolutamente sumable:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^{+N} |h[n]| = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^{+N} \left| \delta[n] + \frac{1}{2} u[n-1] \right| = 1 + \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{+N} \frac{1}{2} \rightarrow \infty \quad (294)$$

- S es un sistema LIT con memoria infinita, puesto que su respuesta impulsional presenta valores diferentes de 0 para $n \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} h[n] = \frac{1}{2} \quad (295)$$

- Si S es un sistema LIT invertible, existe una señal $h'[n]$ (que sería la respuesta impulsional del sistema LIT inverso de S) cuya convolución con $h[n]$ da lugar a $\delta[n]$:

$$h[n] * h'[n] = \delta[n] \Rightarrow \left(\delta[n] + \frac{1}{2}u[n-1] \right) * h'[n] = \delta[n] \quad (296)$$

Se observa que $h[n]$ es una señal infinita orientada a la derecha cuya muestra inicial es $n = 0$. Así, para el cálculo de esta convolución, «fijamos» $h[n]$ y giramos y desplazamos $h'[n]$. Entonces, para que $h[n] * h'[n] = \delta[n]$, vemos que la señal desplazada en el cálculo de la convolución ha de ser tal que $h'[n] = 0, \forall n < 0$, puesto que tanto $h[n]$ como $\delta[n]$ son iguales a 0 para $n < 0$. Así pues, tanto si $h'[n]$ acaba siendo una señal finita o una señal infinita orientada a la derecha, la muestra inicial de $h'[n]$ es $n = 0$.

En estas condiciones, planteamos la convolución por tramos de acuerdo con la Figura 9 y nos situamos en la muestra inicial del segundo tramo de la convolución (el tramo en el que empieza el solapamiento entre $h[n]$ y $h'[n]$). Calculando la convolución muestra a muestra, se observa la siguiente tendencia:

$$\begin{aligned} n < 0: h'[n] &= 0 \\ n = 0: h'[0]h[0] &= \delta[0] = 1 \Rightarrow h'[0] = 1 \\ n = 1: \underbrace{h'[1]h[0]}_{h'[1]} + \underbrace{h'[0]h[1]}_{1/2} &= \delta[1] = 0 \Rightarrow h'[1] = -\frac{1}{2} \\ n = 2: \underbrace{h'[2]h[0]}_{h'[2]} + \underbrace{h'[1]h[1]}_{-1/4} + \underbrace{h'[0]h[2]}_{1/2} &= \delta[2] = 0 \Rightarrow h'[2] = -\frac{1}{4} \\ n = 3: \underbrace{h'[3]h[0]}_{h'[3]} + \underbrace{h'[2]h[1]}_{-1/8} + \underbrace{h'[1]h[2]}_{-1/4} + \underbrace{h'[0]h[3]}_{1/2} &= 0 \Rightarrow h'[3] = -\frac{1}{8} \\ n = 4: \underbrace{h'[4]h[0]}_{h'[4]} + \underbrace{h'[3]h[1]}_{-1/16} + \underbrace{h'[2]h[2]}_{-1/8} + \underbrace{h'[1]h[3]}_{-1/4} + \underbrace{h'[0]h[4]}_{1/2} &= 0 \\ \Rightarrow h'[4] &= -\frac{1}{16} \\ &\vdots \end{aligned} \quad (297)$$

Por tanto, vemos que $h'[n]$ es la siguiente señal:

$$h'[n] = \delta[n] - \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n-1] \quad (298)$$

Lo cual nos confirma que S es un sistema LIT invertible, puesto que hemos sido capaces de encontrar la respuesta impulsional de su sistema LIT inverso.

2.4. Analogía intuitiva entre sistemas LIT y matrices

Sabemos, puesto que ya lo estudiamos en el primer módulo, que una señal (tanto da si analógica o digital, tanto da si finita o infinita) no es más un vector. De lo que se trata ahora es de comprender que, entendidos en términos algebraicos, **los sistemas LIT no son ni más ni menos que matrices**. Y, como en el caso de las señales/vectores, esto no es una simple analogía, sino una relación de identidad: sistema LIT = matriz.

De entrada, recordemos que el producto entre un vector y una matriz da lugar a otro vector, de modo tal que **una matriz transforma linealmente un vector en otro vector distinto**. Ilustremos esto con un ejemplo sencillo. Sean el vector \bar{a} y la matriz \bar{M} :

$$\bar{a} = [1 \quad 1/2 \quad 1/3] \quad (299)$$

$$\bar{M} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad (300)$$

allí donde \bar{a} es un vector de \mathbb{R}^3 (de 1 fila y 3 columnas) y donde \bar{M} es una matriz de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^5$ (de 3 filas y 5 columnas).

Recordemos ahora cómo funciona el producto matricial: el producto escalar de la fila i -ésima de la primera matriz por la columna j -ésima de la segunda matriz da lugar al elemento (i, j) del resultado. Así, **el producto de $\bar{a} \cdot \bar{M}$ son cinco productos escalares**, lo cual da lugar a un nuevo vector \bar{b} de \mathbb{R}^5 (de 1 fila y 5 columnas):

$$\bar{b} = \bar{a} \cdot \bar{M} = [1 \quad 1/2 \quad 1/3] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = [1 \quad 5/2 \quad 13/3 \quad 13/6 \quad 1] \quad (301)$$

Por tanto, se observa que \bar{M} transforma vectores de \mathbb{R}^3 (en el ejemplo, \bar{a}) en vectores de \mathbb{R}^5 (en el ejemplo, \bar{b}). Y que dicha transformación es lineal, puesto que la componente j -ésima de \bar{b} (vector de salida de la transformación lineal) es el resultado del producto escalar de \bar{a} (vector de entrada de la transformación lineal) por la columna j -ésima de \bar{M} .

Pues bien, exactamente de este mismo modo, **un sistema LIT implementa una transformación lineal que, aplicada a una señal (señal de entrada del sistema), da lugar a otra señal (señal de salida del sistema)**. Para comprender cómo sucede esto, vamos a considerar, también a modo de ejemplo, una señal digital de longitud finita ($x[n]$) y un sistema S LIT digital cuya respuesta impulsional ($h[n]$) también es de longitud finita:

$$x[n] = \delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1] + \frac{1}{3}\delta[n-2] \quad (302)$$

$$h[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] + 3\delta[n-2] \quad (303)$$

Nótese que $x[n]$ es de longitud 3 y que sus muestras (1, 1/2, 1/3) son iguales a las componentes del vector \bar{a} , y que $h[n]$ también es de longitud 3 y que sus muestras (1, 2, 3) coinciden con los valores distintos de 0 que se van desplazando de columna en columna a lo largo de las filas de \bar{M} .

Siendo $x[n]$ la señal de entrada de S , su señal de salida será igual al resultado de la convolución $x[n] * h[n]$, que podemos resolver fácilmente de acuerdo con la ecuación (64):

$$y[n] = x[n] * h[n] = \delta[n] + \frac{5}{2}\delta[n-1] + \frac{13}{3}\delta[n-2] + \frac{13}{6}\delta[n-3] + \delta[n-4] \quad (304)$$

Nótese que $y[n]$, siendo el resultado de la convolución $x[n] * h[n]$, es de longitud 5 y que sus muestras son iguales a las componentes del vector \bar{b} , que es el resultado del producto $\bar{a} \cdot \bar{M}$.

Detengámonos a observar, paso por paso, el proceso de cálculo por tramos de la convolución entre $x[n]$ y $h[n]$, dejando «fijada» $x[n]$ y desplazando y girando $h[n]$. Descontados los tramos primero y último (que carecen de interés, puesto que en ellos no hay solapamiento entre ambas señales), vemos que, cada vez que $h[n - m]$ se desplaza una muestra hacia la derecha, ese paso de la convolución da lugar a una muestra de $y[n]$, que es el resultado de multiplicar muestra a muestra $x[m]$ por $h[n - m]$ y sumar los resultados de las tres multiplicaciones. Es decir, **$y[n_0]$ es el resultado del producto escalar de $x[m]$ por $h[n_0 - m]$.**

Al comparar, pues, la operación $\bar{a} \cdot \bar{M}$ con la operación $x[n] * h[n]$, vemos que **ambas operaciones son exactamente la misma**. Solo hay que darse cuenta de que **las componentes de \bar{a} son las muestras de $x[m]$** , y de que **las componentes de cada columna de \bar{M} son las muestras de las diferentes versiones desplazadas de $h[n - m]$** . Esta comparación puede verse aún más fácilmente si la implementamos en MATLAB:

```
>> x = [1 1/2 1/3];
>> h = [1 2 3];
>> a = x

a =

    1.0000    0.5000    0.3333

>> M = [h 0 0;0 h 0;0 0 h]

M =

     1     2     3     0     0
     0     1     2     3     0
     0     0     1     2     3

>> a*M

ans =

    1.0000    2.5000    4.3333    2.1667    1.0000

>> conv(x,h)

ans =

    1.0000    2.5000    4.3333    2.1667    1.0000
```

Finalmente, como ya comentamos en el primer módulo al establecer la analogía entre señales y vectores, esto puede extrapolarse a cualquier sistema LIT y a cualquier señal, ya sean analógicos o digitales, ya sean de longitud finita o infinita. Simplemente, hay que establecer la analogía con vectores de infinitas componentes y matrices de infinitas filas y columnas.

Por lo tanto, en términos algebraicos, se concluye que:

- **Un sistema LIT es una matriz.**
- **La señal de salida de un sistema LIT es una transformación lineal de la señal de entrada.**
- **La operación convolución es una sucesión de productos escalares.**

3. Relación entrada-salida de sistemas LIT

Llegados a este punto, ya sabemos cómo caracterizar completamente cualquier sistema LIT mediante su respuesta impulsional. Sin embargo, aún queda pendiente la cuestión de cómo relacionar la respuesta impulsional de un sistema LIT con su relación entrada-salida. Ciertamente, una vez conocida su respuesta impulsional, la relación entrada-salida de un sistema LIT ya no es necesaria, pues no aporta ninguna información que no esté contenida en la respuesta impulsional. Sin embargo, sí es interesante saber cómo calcular de manera adecuada la respuesta impulsional de un sistema LIT a partir de su relación entrada-salida.

En esta sección, no vamos a estudiar las diferentes formas que puede adoptar la relación entrada-salida de un sistema LIT en términos generales, sino que vamos a centrar el foco en una cierta clase de sistemas LIT de gran importancia en la práctica. En particular:

- Los sistemas LIT analógicos cuya relación entrada-salida adopta la forma de una ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes.
- Los sistemas LIT digitales cuya relación entrada-salida adopta la forma de una ecuación en diferencias lineal de coeficientes constantes.

Sucede que una amplia variedad de sistemas y de fenómenos físicos pueden ser descritos como sistemas LIT de esta clase. En concreto, la gran mayoría de sistemas LIT presentes en el ámbito de la ingeniería pertenece a esta clase de sistemas LIT, y muy especialmente aquellos que presentan un mayor interés práctico. Por ejemplo: los circuitos electrónicos de primer orden (RC y RL), de segundo orden (RLC) y de órdenes superiores; el movimiento de un cuerpo sujeto a aceleraciones y fuerzas de fricción; los sistemas mecánicos amortiguados; la cinética de las reacciones químicas; la descripción de la acumulación de ahorros y deudas bancarias; las operaciones de cálculo estadístico más comunes (acumulaciones, promedios, variancias...); etc.

De ahí el interés en esta clase de sistemas LIT. Además, al tratarse de sistemas que modelizan situaciones reales, vamos a ocuparnos únicamente del estudio de las ecuaciones diferenciales y las ecuaciones en diferencias correspondientes a sistemas LIT causales (es decir, y como ya sabemos, los únicos que son implementables en la práctica a tiempo real).

Finalmente, conviene destacar que en esta sección nos limitaremos a describir la forma y las particularidades de las relaciones entrada-salida de esta clase de sistemas, así como de sus diagramas de bloques asociados, pero no entraremos al detalle en los desarrollos matemáticos que permiten llegar a las soluciones de estas ecuaciones. Del mismo modo que con la invertibilidad o con la asociación en lazo de realimentación de sistemas LIT, aquí también sucede que la solución más sencilla a este problema la veremos en módulos posteriores, al abandonar el dominio temporal y empezar a trabajar en dominios transformados; en el caso concreto de estas ecuaciones que a continuación veremos, serán la Transformada de Laplace y la Transformada z las que nos permitirán obtener muy fácilmente la respuesta impulsional de esta clase de sistemas LIT a partir de sus relaciones entrada-salida.

3.1. Sistemas LIT analógicos causales: ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes

Considérese la siguiente relación entrada-salida de un sistema (**aún no LIT**) analógico S :

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \quad (305)$$

allí donde $x(t)$ e $y(t)$ son las señales de entrada y de salida de S ; $d^k x(t)/dt^k$ y $d^k y(t)/dt^k$ son las derivadas k -ésimas de $x(t)$ e $y(t)$; a_k y b_k son coeficientes constantes de magnitud finita ($|a_k|, |b_k| \neq \infty$) y, en general, complejos ($a_k, b_k \in \mathbb{C}$), con $a_0 \neq 0$; y N y M son enteros finitos no negativos ($N, M \in \mathbb{Z}$, con $N, M \geq 0$).

La ecuación expresada en (305) es una **ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes de orden N** y nos indica que la salida de S se calcula a partir de $x(t)$, las M primeras derivadas de $x(t)$ y las N primeras derivadas de $y(t)$, todas ellas multiplicadas por coeficientes constantes (a_k y b_k) y sumadas entre sí; es decir:

$$a_0 y(t) + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \dots + a_N \frac{d^N y(t)}{dt^N} = b_0 x(t) + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_2 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \dots + b_M \frac{d^M x(t)}{dt^M} \quad (306)$$

Fácilmente, podemos aislar la señal de salida del sistema en esta ecuación:

$$y(t) = \sum_{k=0}^M \frac{b_k}{a_0} \frac{d^k x(t)}{dt^k} - \sum_{k=1}^N \frac{a_k}{a_0} \frac{d^k y(t)}{dt^k} \quad (307)$$

Esta expresión nos permite proponer, sin demasiada dificultad, una posible implementación (no es la única, pues hay otras posibilidades que aquí no estudiaremos) del diagrama de bloques asociado a una relación entrada-salida de esta forma:

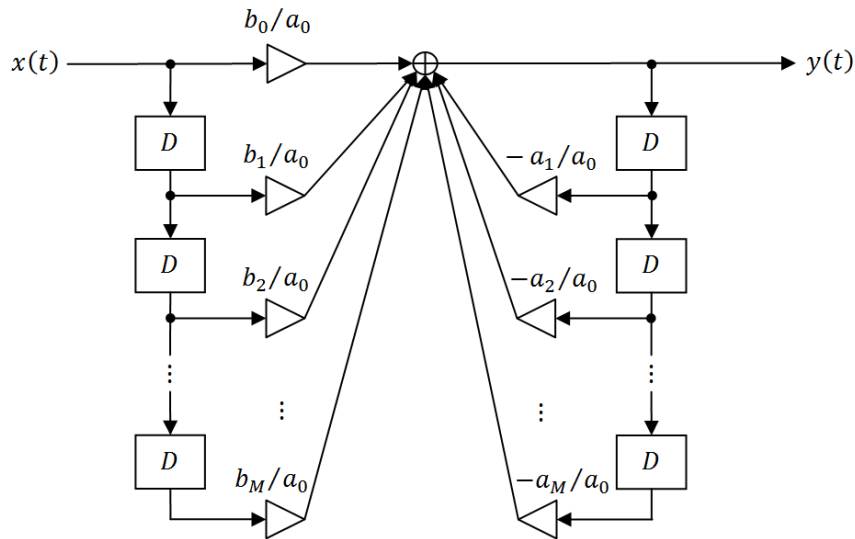


Figura 26. Posible implementación del diagrama de bloques de un sistema analógico regido por una relación entrada-salida cuya forma es una ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes de orden N .

Se observa que cada término de la ecuación diferencial asociado a $x(t)$ o una de sus derivadas se corresponde con una «rama de entrada» del sistema, mientras que cada término asociado a una de las derivadas de $y(t)$ se corresponde con una «rama de realimentación» del sistema.

Entonces, a la luz de esta relación entrada-salida y su diagrama de bloques asociado, podemos concluir las siguientes afirmaciones en lo referente a las propiedades básicas de este sistema:

- **El sistema S es invariante en el tiempo**, puesto que en la ecuación (307) solo hay operaciones de derivación de $x(t)$ e $y(t)$, productos por constantes y sumas.
- **El sistema S es causal**, puesto que en la ecuación (307) no se usa información futura de $x(t)$ ni de $y(t)$.
- Si $N = 0$ (es decir, si no hay ramas de realimentación), **el sistema S es estable**, puesto que, sin ramas de realimentación, su salida está acotada en amplitud siempre que lo esté su entrada.

Si $N > 0$ (es decir, si hay alguna rama de realimentación con $a_k \neq 0$), **la estabilidad del sistema S dependerá de los valores de los coeficientes a_k** . Y, por el momento, no diremos más sobre esta cuestión¹.

- Si $N > 0$, **el sistema S tiene memoria infinita** (y, por tanto, es IIR), debido al hecho de tener ramas de realimentación (*i.e.* que haya algún $a_k \neq 0$ para $k > 0$)².

Si $N = 0$, **el sistema S tiene memoria finita** (y, por tanto, es FIR), puesto que, sin ninguna rama de realimentación, su memoria no puede ser infinita.

Si $M = N = 0$, **el sistema S es instantáneo**, puesto que la ecuación (307) se reduce a $y(t) = (b_0/a_0)x(t)$.

- **El sistema S es invertible**. Y, por el momento, no diremos más sobre esta cuestión³.

Conviene notar que la única propiedad del sistema S que, hasta el momento, no hemos evaluado es la de linealidad (indispensable para poder determinar si S es o no un sistema LIT). Para poder hacerlo adecuadamente, es necesario tener en cuenta que la solución explícita de la ecuación (307) tiene dos partes diferentes:

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t) \quad (308)$$

allí donde:

¹ La condición de estabilidad de esta clase de sistemas la hallaremos mucho más fácilmente en el siguiente módulo, al estudiarlos mediante la Transformada de Laplace.

² Podría llegar a darse el caso de que, aun habiendo algún $a_k \neq 0$ para $k > 0$, el sistema no fuera de memoria infinita (ni, por tanto, IIR). Tal caso sucedería si la ecuación diferencial fuese simplificable y, al ser simplificada, quedara una ecuación diferencial de orden 0. De este modo, se trataría de un sistema sin ramas de realimentación y, con ello, sería estable y de memoria finita (y, por tanto, FIR). Este caso (muy particular) se verá mucho más claramente en el siguiente módulo, al estudiar esta clase de sistemas mediante la Transformada de Laplace.

³ De nuevo, obtener la relación entrada-salida del sistema inverso al sistema S es muy sencillo usando la Transformada de Laplace, herramienta que estudiaremos en el siguiente módulo.

- $y_p(t)$ es la denominada **solución particular** de la ecuación diferencial y no es más que la parte de la solución total que **depende de $x(t)$** . O sea, la solución particular es la parte de la solución que nos interesa conocer, pues de lo que se trata es de poder obtener $y(t)$ en función de $x(t)$, para, de este modo, poder calcular la respuesta impulsional del sistema S (que, como sabemos, es $y(t)$ cuando $x(t) = \delta(t)$). A esta parte de la solución también se la denomina **respuesta forzada del sistema**.
- $y_h(t)$ es la denominada **solución homogénea** de la ecuación diferencial y no es más que la parte de la solución total que **no depende de $x(t)$** . A esta parte de la solución también se la denomina **respuesta libre del sistema** (o sea, la respuesta del sistema en ausencia de señal de entrada).

Así pues, la existencia de una solución homogénea (o respuesta libre) asociada a la relación entrada-salida del sistema indica que **la salida de este sistema puede no ser igual a 0 en ausencia de señal de entrada** (o sea, cuando $x(t) = 0$). Y justamente ese es el quid de la cuestión en lo referente a la linealidad de S : **un sistema en que $x(t) = 0$ no implica que $y(t) = 0$ no es un sistema lineal**.

Para entender esto, únicamente hay que analizar (tal y como ya vimos en el módulo anterior) sistemas tales como los siguientes (son solo dos ejemplos) y darse cuenta de que, en efecto, son no lineales:

$$y(t) = x(t) + K \quad (309)$$

$$y(t) = x(t) + p(t) \quad (310)$$

siendo K una constante y $p(t)$ una señal cualquiera (en ambos casos, totalmente independientes de $x(t)$). En ambos casos, se da que $y(t) \neq 0$ cuando $x(t) = 0$.

Así pues, necesitamos saber si es posible anular la respuesta homogénea de S ($y_h(t) = 0$), puesto que:

- Si $y_h(t) \neq 0$, **el sistema S es no lineal**, tal y como ilustran los dos ejemplos de (309) y (310).
- Si $y_h(t) = 0$, **el sistema S es lineal**, puesto que, en este caso, la solución explícita para $y(t)$ asociada a su relación entrada-salida es enteramente dependiente de $x(t)$ (es decir, $y(t) = y_p(t)$) y, garantizado esto, demostrar la linealidad de S es bien fácil, ya que en la ecuación (307) solo hay operaciones de derivación de $x(t)$ e $y(t)$, productos por constantes y sumas (todas ellas, operaciones lineales).

Entonces, para saber bajo qué condiciones se da que $y_h(t) = 0$, forzamos que $x(t) = 0$ en la ecuación (305) e igualamos la expresión resultante a 0:

$$\left. \begin{array}{l} x(t) = 0 \\ y_h(t) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = 0 \quad (311)$$

Por tanto, la solución a esta ecuación (311), si existe, nos indica cuáles son **las condiciones bajo las que el sistema S es lineal**, pues son las condiciones que anulan la respuesta libre del sistema ($y_h(t) = 0$).

Para hallar estas condiciones, pero sin tener que calcularlas explícitamente (lo cual no nos interesa demasiado, puesto que lo importante aquí no es este cálculo en sí, ni la forma de $y_h(t)$, sino cómo garantizar que $y_h(t) = 0$), pensemos por un momento en el instante en que este sistema S empieza a funcionar. Pongamos por caso que el sistema se pone en marcha en $t = t_0$, de modo que, el sistema empieza a calcular la señal de salida en ese instante. En ausencia de señal de entrada ($x(t) = 0$), la ecuación (311) para $t = t_0$ queda como sigue:

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t_0)}{dt^k} = 0 \quad (312)$$

Vemos que hacer este cálculo requiere determinar el valor de $d^k y(t_0)/dt^k$ para $k \in \{0, \dots, N\}$ en ausencia de señal de entrada, de modo que **los valores que adopten $y(t)$ y sus derivadas en este instante inicial serán independientes de $x(t)$** .

Así, si forzamos que $d^k y(t_0)/dt^k = 0$ para $k \in \{0, \dots, N\}$, estaremos garantizando que se cumple la ecuación (312). Debido a que el sistema es realimentado, los valores de $y(t)$ y sus derivadas tras el instante inicial ($t > t_0$) dependen de sus valores iniciales en $t = t_0$. De este modo, forzar que $d^k y(t_0)/dt^k = 0$ para $k \in \{0, \dots, N\}$ garantiza que $y_h(t) = 0$ para todo valor de t . Así, **eliminar la posibilidad de que $y(t)$ sea independiente de $x(t)$ en el instante inicial en que el sistema se pone en funcionamiento, implicar eliminar la posibilidad de que, en general, haya una parte de $y(t)$ que sea independiente de $x(t)$** .

Por tanto, vemos que es la puesta en condiciones iniciales del sistema lo que determina su respuesta libre; esto es, lo que determina si hay o no solución homogénea (parte de la salida independiente de la entrada) asociada a la relación entrada-salida del sistema; esto es, lo que determina si el sistema es o no lineal. Y **la puesta en condiciones iniciales que garantiza que el sistema S es lineal consiste en forzar que las salidas de los bloques de derivación del sistema (ver la Figura 26) valgan 0 en el instante inicial en que el sistema se pone en funcionamiento**.

Así pues, todo lo expuesto hasta este punto se resume en el siguiente lema, que queda como la conclusión final de este apartado:

Todo sistema analógico S regido por una relación entrada-salida con forma de ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes de orden N :

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \quad (313)$$

es un sistema LIT si la puesta en condiciones iniciales del sistema es tal que:

$$\frac{d^k y(t_0)}{dt^k} = 0, \quad \forall k \in \{0, \dots, N\} \quad (314)$$

siendo $y(t) = T_S\{x(t)\}$; t_0 el instante inicial (o de puesta en marcha) de S ; $a_k, b_k \in \mathbb{C}$, con $a_0 \neq 0$; y $N, M \in \mathbb{Z}$, con $N, M \geq 0$.

Habiendo garantizado que S es un sistema LIT, ahora ya sí interesa conocer su respuesta impulsional (pues, como sabemos, caracteriza totalmente el sistema por ser este LIT). Por tanto, ahora ya sí interesa calcular su respuesta particular, es decir, calcular su salida explícitamente en función de su entrada, para poder obtener su respuesta impulsional.

Sin embargo, esto es algo que no haremos aquí, sino en el siguiente módulo, puesto que, como ya hemos advertido varias veces a lo largo de este módulo, este es un cálculo que se resuelve de forma sistemática y razonablemente sencilla mediante el uso de la Transformada de Laplace.

3.2. Sistemas LIT digitales causales: ecuación en diferencias lineal de coeficientes constantes

El caso digital es análogo al caso analógico, de modo que el desarrollo de este apartado es similar al del apartado anterior. Debido a esto, las explicaciones serán aquí más directas y escuetas, y nos detendremos únicamente en las particularidades exclusivas del caso digital (que las hay y tienen su interés).

Considérese la siguiente relación entrada-salida de un sistema (**aún no LIT**) digital S :

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \quad (315)$$

siendo $y[n] = T_S\{x[n]\}$; los coeficientes constantes $a_k, b_k \in \mathbb{C}$, con $a_0 \neq 0$; y $N, M \in \mathbb{Z}$, con $N, M \geq 0$.

La ecuación expresada en (315) es una **ecuación en diferencias lineal de coeficientes constantes de orden N** :

$$\begin{aligned} a_0 y[n] + a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] + \dots + a_N y[n-N] = \\ b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2] + \dots + b_M x[n-M] \end{aligned} \quad (316)$$

Fácilmente, podemos aislar la señal de salida del sistema en esta ecuación:

$$y[n] = \sum_{k=0}^M \frac{b_k}{a_0} x[n-k] - \sum_{k=1}^N \frac{a_k}{a_0} y[n-k] \quad (317)$$

En la Figura 27, se propone una posible implementación (no es la única, pues hay otras posibilidades que aquí no estudiaremos) del diagrama de bloques asociado a una relación entrada-salida de esta forma.

Se observa que cada término de la ecuación en diferencias asociado a $x[n]$ o una de sus versiones retardadas se corresponde con una «rama de entrada» del sistema, mientras que cada término asociado a una de las versiones retardadas de $y[n]$ se corresponde con una «rama de realimentación» del sistema.

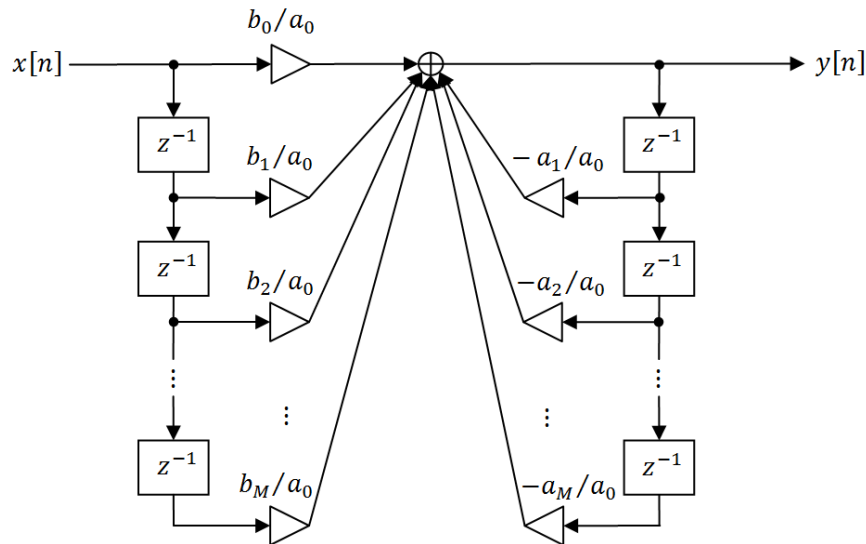


Figura 27. Posible implementación del diagrama de bloques de un sistema digital regido por una relación entrada-salida cuya forma es la de una ecuación en diferencias lineal de coeficientes constantes de orden N .

Entonces, a la luz de esta relación entrada-salida y su diagrama de bloques asociado, podemos concluir las siguientes afirmaciones en lo referente a las propiedades básicas de este sistema:

- El sistema S es invariante en el tiempo, puesto que en la ecuación (317) solo hay operaciones de retardo de $x[n]$ e $y[n]$, productos por constantes y sumas.
- El sistema S es causal, puesto que en la ecuación (317) no se usa información futura de $x[n]$ ni de $y[n]$. Sin embargo, si alguno de los dos sumatorios de la ecuación en diferencias se iniciase para algún valor negativo del índice ($k < 0$), entonces el sistema sí sería no causal, puesto que sí estaría usando información futura de $x[n]$ y/o de $y[n]$.
- Si $N = 0$ (es decir, si no hay ramas de realimentación), el sistema S es estable, puesto que, sin ramas de realimentación, su salida está acotada en amplitud siempre que lo esté su entrada.

Si $N > 0$ (es decir, si hay alguna rama de realimentación con $a_k \neq 0$), la estabilidad del sistema S dependerá de la magnitud de los valores de los coeficientes a_k . En concreto, si $|a_k/a_0| < 1, \forall k \in \{0, \dots, N\}$, el sistema S será estable⁴.

- Si $N > 0$, el sistema S tiene memoria infinita (y, por tanto, es IIR), debido al hecho de tener ramas de realimentación (i.e. que haya algún $a_k \neq 0$ para $k > 0$)⁵.

⁴ Las causas de esta condición de estabilidad (el factor de ganancia que pondera una rama realimentada ha de ser de módulo menor que la unidad para que el sistema sea estable) ya las vimos en el módulo anterior. Aun así, quedarán plenamente justificadas en módulos posteriores, cuando estudiemos esta clase de sistemas mediante la Transformada z .

⁵ Podría llegar a darse el caso de que, aun habiendo algún $a_k \neq 0$ para $k > 0$, el sistema no fuera de memoria infinita (ni, por tanto, IIR). Tal caso sucedería si la ecuación en diferencias fuese simplificable y, al ser simplificada, quedara una ecuación en diferencias de orden 0. De este modo, se trataría de un sistema sin ramas de realimentación y, con ello, sería estable y de memoria finita (y, por tanto, FIR). Este caso (muy particular) lo veremos mucho más claramente en módulos posteriores, al estudiar esta clase de sistemas mediante la Transformada z .

Si $N = 0$, el sistema S tiene memoria finita (y, por tanto, es **FIR**), puesto que, sin ninguna rama de realimentación, su memoria no puede ser infinita.

Si $M = N = 0$, el sistema S es instantáneo, puesto que la ecuación (307) se reduce a $y[n] = (b_0/a_0)x[n]$.

- El sistema S es invertible. Y, por el momento, no diremos más sobre esta cuestión⁶.

Para poder determinar si el sistema S es o no lineal (y, por tanto, si es o no LIT), es necesario tener en cuenta que la solución explícita de la ecuación (317) tiene dos partes diferentes:

$$y[n] = y_p[n] + y_h[n] \quad (318)$$

allí donde:

- $y_p[n]$ es la denominada **solución particular** de la ecuación en diferencias y no es más que la parte de la solución total que **depende de $x[n]$** . O sea, la solución particular es la parte de la solución que nos interesa conocer, pues de lo que se trata es de poder obtener $y[n]$ en función de $x[n]$, para, de este modo, poder calcular la respuesta impulsional del sistema S (que, como sabemos, es $y[n]$ cuando $x[n] = \delta[n]$). A esta parte de la solución también se la denomina **respuesta forzada del sistema**.
- $y_h[n]$ es la denominada **solución homogénea** de la ecuación en diferencias y no es más que la parte de la solución total que **no depende de $x[n]$** . A esta parte de la solución también se la denomina **respuesta libre del sistema** (o sea, la respuesta del sistema en ausencia de señal de entrada).

Así pues, si $y_h[n] \neq 0$, la salida del sistema sería diferente de 0 en ausencia de señal de entrada (o sea, cuando $x[n] = 0$). Y, como ya hemos ilustrado en el caso analógico con los ejemplos de (309) y (310), esa es justamente la cuestión:

- Si $y_h[n] \neq 0$, el sistema S es no lineal.
- Si $y_h[n] = 0$, el sistema S es lineal, puesto que, en ese caso, $y[n]$ es enteramente dependiente de $x[n]$ (es decir, $y[n] = y_p[n]$) y, garantizado esto, demostrar la linealidad de S es bien fácil, ya que en la ecuación (317) solo hay operaciones lineales: retardos de $x[n]$ e $y[n]$, productos por constantes y sumas.

Entonces, para saber bajo qué condiciones se da que $y_h[n] = 0$, forzamos que $x[n] = 0$ en la ecuación (315) e igualamos la expresión resultante a 0:

$$\left. \begin{array}{l} x[n] = 0 \\ y_h[n] = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = 0 \quad (319)$$

Por tanto, la solución a esta ecuación (319), si existe, nos indica cuáles son **las condiciones bajo las que el sistema S es lineal**, pues son las condiciones que anulan la respuesta libre del sistema ($y_h[n] = 0$).

⁶ De nuevo, obtener la relación entrada-salida del sistema inverso al sistema S es muy sencillo usando la Transformada z , herramienta que estudiaremos módulos posteriores.

Para hallar estas condiciones, pensemos por un momento en el instante en que este sistema S empieza a funcionar. Pongamos por caso que el sistema se pone en marcha en $n = n_0$, de modo que, el sistema empieza a calcular la señal de salida en ese instante. En ausencia de señal de entrada ($x[n] = 0$), la ecuación (319) para $n = n_0$ queda como sigue:

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n_0 - k] = 0 \quad (320)$$

Vemos que hacer este cálculo requiere determinar el valor de $y[n_0 - k]$ para $k \in \{0, \dots, N\}$ en ausencia de señal de entrada, de modo que **los valores que adopten $y[n]$ y sus versiones retardadas en este instante inicial serán independientes de $x[n]$.**

Así, si forzamos que $y[n_0 - k] = 0$ para $k \in \{0, \dots, N\}$, estaremos garantizando que se cumple la ecuación (320). Debido a que el sistema es realimentado, los valores de $y[n]$ y sus versiones retardadas tras el instante inicial ($n > n_0$) dependen de sus valores iniciales en $n = n_0$. De este modo, forzar que $y[n_0 - k] = 0$ para $k \in \{0, \dots, N\}$ garantiza que $y_h[n] = 0$ para todo valor de n . Así, **eliminar la posibilidad de que $y[n]$ sea independiente de $x[n]$ en el instante inicial en que el sistema se pone en funcionamiento, implica eliminar la posibilidad de que, en general, haya una parte de $y[n]$ que sea independiente de $x[n]$.**

Por tanto, es la puesta en condiciones iniciales del sistema lo que determina su respuesta libre; esto es, lo que determina si hay o no solución homogénea (parte de la salida independiente de la entrada) asociada a la relación entrada-salida del sistema; esto es, lo que determina si el sistema es o no lineal. Y **la puesta en condiciones iniciales que garantiza que el sistema S es lineal consiste en forzar que las salidas de los bloques de retardo del sistema (ver la Figura 27) valgan 0 en el instante inicial en que el sistema se pone en funcionamiento.**

Así pues, todo lo expuesto hasta este punto se resume en el siguiente lema:

Todo sistema digital S regido por una relación entrada-salida con forma de ecuación en diferencias lineal de coeficientes constantes de orden N :

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n - k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n - k] \quad (321)$$

es un sistema LIT si la puesta en condiciones iniciales del sistema es tal que:

$$y[n_0 - k] = 0, \forall k \in \{0, \dots, N\} \quad (322)$$

siendo $y[n] = T_S\{x[n]\}$; n_0 el instante inicial (o de puesta en marcha) de S ; $a_k, b_k \in \mathbb{C}$, con $a_0 \neq 0$; y $N, M \in \mathbb{Z}$, con $N, M \geq 0$.

Habiendo garantizado que S es un sistema LIT, ahora ya sí interesa conocer su respuesta impulsional (pues, como sabemos, caracteriza totalmente el sistema por ser este LIT). Por

tanto, ahora ya sí interesa calcular su respuesta particular, es decir, calcular su salida explícitamente en función de su entrada, para poder obtener su respuesta impulsional.

Como en el caso analógico, esto es algo que, en general, no haremos aquí, sino en módulos posteriores, puesto que, como ya hemos advertido varias veces a lo largo de este módulo, este es un cálculo que se resuelve de forma sistemática y razonablemente sencilla mediante el uso de la Transformada z .

Sin embargo, y a diferencia de lo que sucede con el caso analógico, no se requiere abandonar el dominio del tiempo para poder obtener muy fácilmente la respuesta impulsional de este tipo de sistemas digitales en el caso en que sean sistemas FIR, es decir, en el caso en que no presenten ramas de realimentación.

Partiendo de (317), si $N = 0$ (o, si se prefiere, si $a_k = 0, \forall k \in \{1, \dots, N\}$):

$$y[n] = \sum_{k=0}^M \frac{b_k}{a_0} x[n-k] \quad (323)$$

En esta situación, es trivial ver que **la respuesta impulsional de este sistema es la suma de $M + 1$ deltas discretas ponderadas con los coeficientes constantes de la ecuación en diferencias:**

$$h[n] = \sum_{k=0}^M \frac{b_k}{a_0} \delta[n-k] = \frac{b_0}{a_0} \delta[n] + \frac{b_1}{a_0} \delta[n-1] + \dots + \frac{b_M}{a_0} \delta[n-M] \quad (324)$$

4. Teorema de las autofunciones

En la última sección de este módulo, se estudia la que, junto con la convolución, es la característica más relevante asociada a los sistemas LIT, tanto por su aplicación práctica inmediata, como, sobre todo, por las importantísimas consecuencias que de ella se derivan. Se trata del denominado «teorema de las autofunciones» de los sistemas LIT y, en general, puede ser entendido como una propiedad que cumple todo sistema LIT.

Así, en los apartados 4.1 y 4.2, se enuncia y demuestra este teorema para los sistemas LIT analógicos y digitales, respectivamente. Además, se resuelven ejercicios prácticos que ilustran sus aplicaciones prácticas más inmediatas. Finalmente, en el apartado 4.3, se discute el significado algebraico del teorema y se da cuenta de cuáles son sus consecuencias, que, ya podemos adelantarlos, determinan los contenidos de todos los módulos posteriores a este.

4.1. Autofunciones de los sistemas LIT analógicos

Sea S un sistema LIT analógico cualquiera y sea $h(t)$ su respuesta impulsional. Considérese que la señal de entrada de S es una señal exponencial compleja de la forma siguiente:

$$x(t) = e^{s_0 t} \quad (325)$$

allí donde s_0 es una constante compleja ($s_0 \in \mathbb{C}$).

Al calcular la señal de salida de S como el resultado de la convolución entre $x(t)$ y $h(t)$, se observa lo siguiente:

$$\begin{aligned} y(t) = x(t) * h(t) &= h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{s_0(t-\tau)} d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{s_0 t} e^{-s_0 \tau} d\tau = e^{s_0 t} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-s_0 \tau} d\tau}_{H(s_0)} = H(s_0) e^{s_0 t} \end{aligned} \quad (326)$$

allí donde, independientemente de si $h(t)$ es una señal real o compleja, $H(s_0)$ es un valor constante (no depende de t) y, en general, complejo (puesto que $s_0 \in \mathbb{C}$).

Así pues, se observa que **la salida de un sistema LIT analógico cualquiera ante cualquier señal exponencial compleja de la forma expresada en (325) es igual a esa misma señal exponencial compleja multiplicada por una constante**; en concreto, por la constante denominada $H(s_0)$ en (326). Se observa, además, que dicha constante depende únicamente de $h(t)$ (la respuesta impulsional del sistema) y del valor de s_0 .

En este punto, enunciamos el **teorema de las autofunciones de los sistemas LIT analógicos**:

Las señales exponencial compleja de la forma $e^{s_0 t}$ ($s_0 \in \mathbb{C}$) son autofunciones de los sistemas LIT analógicos, puesto que son procesadas por esta clase de sistemas de modo tal que en la salida siguen siendo ellas mismas multiplicadas por una constante:

$$y(t) = T_S\{x(t) = e^{s_0 t}\} = H(s_0)e^{s_0 t} \quad (327)$$

allí donde S es un sistema LIT analógico, y donde **la constante $H(s_0)$ es el autovalor asociado a la autofunción $e^{s_0 t}$** , que se calcula como:

$$H(s_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-s_0 t} dt \quad (328)$$

siendo $h(t)$ la respuesta impulsional de S .

En primer lugar, conviene notar que la constante s_0 tiene parte real y parte imaginaria:

$$s_0 = \sigma_0 + j\Omega_0 \quad \begin{cases} \Re(s_0) = \sigma_0 \\ \Im(s_0) = \Omega_0 \end{cases} \quad (329)$$

Por tanto, vemos que las autofunciones de los sistemas LIT analógicos pueden ser vistas como el resultado del producto de una señal exponencial real y una señal exponencial compleja:

$$e^{s_0 t} = e^{(\sigma_0 + j\Omega_0)t} = e^{\sigma_0 t} e^{j\Omega_0 t} \quad (330)$$

allí donde σ_0 y Ω_0 son constantes reales ($\sigma_0, \Omega_0 \in \mathbb{R}$).

Y, en segundo lugar, puesto todo sistema LIT es, por definición, lineal e invariante en el tiempo, ya podemos extraer la consecuencia más inmediata, pero de enorme importancia, del teorema de las autofunciones. Sea una combinación lineal arbitraria de M exponenciales complejas:

$$x(t) = \sum_{k=1}^M c_k e^{s_k(t+t_k)} = c_1 e^{s_1(t+t_1)} + \dots + c_M e^{s_M(t+t_M)} \quad (331)$$

allí donde $c_k, s_k \in \mathbb{C}, \forall k \in \{1, \dots, M\}; t_k \in \mathbb{R}, \forall k \in \{1, \dots, M\};$ y $M \in \mathbb{Z}$, con $M \geq 1$.

La salida de cualquier sistema LIT analógico S ante una entrada de la forma expresada en (331) es otra combinación lineal de las mismas exponenciales complejas:

$$y(t) = T_S\{x(t)\} = \sum_{k=1}^M H(s_k) c_k e^{s_k(t+t_k)} \quad (332)$$

allí donde $H(s_k)$ se calcula a partir de $h(t)$, la respuesta impulsional de S , del siguiente modo:

$$H(s_k) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-s_k t} dt \quad (333)$$

Para finalizar, y a la luz de esta consecuencia que acabamos de comentar, a continuación se propone un ejercicio que ilustra la utilidad práctica del teorema de las autofunciones:

Ejemplo 7

Sea S un sistema LIT analógico y sea $h(t)$ su respuesta impulsional:

$$h(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^t u(t) \quad (334)$$

Se pide calcular la salida de S ante la siguiente señal de entrada:

$$x(t) = \cos^2(10\pi t) \quad (335)$$

Solución

En lugar de calcular la convolución entre $x(t)$ y $h(t)$, aplicamos el teorema de las autofunciones para resolver el problema. Gracias a la fórmula de Euler, la señal sinusoidal de entrada expresada en (335) se puede expresar como una combinación lineal de exponenciales complejas:

$$x(t) = \cos^2(10\pi t) = \left(\frac{e^{j10\pi t} + e^{-j10\pi t}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{j20\pi t} + \frac{1}{4}e^{-j20\pi t} \quad (336)$$

Por tanto, aplicando (332), vemos que la salida de S es la siguiente:

$$y(t) = T_S\{x(t)\} = H(0)\frac{1}{2} + H(j20\pi)\frac{1}{4}e^{j20\pi t} + H(-j20\pi)\frac{1}{4}e^{-j20\pi t} \quad (337)$$

allí donde las constantes $H(0)$, $H(j20\pi)$ y $H(-j20\pi)$ se calculan según (333):

$$H(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-0t}dt = \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^t dt = \frac{1}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^t\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{-\ln(2)}(-1) = \frac{1}{\ln(2)} \quad (338)$$

$$H(j20\pi) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-j20\pi t}dt = \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-j20\pi}}{2}\right)^t dt = \frac{1}{\ln\left(\frac{e^{-j20\pi}}{2}\right)} \left[\left(\frac{e^{-j20\pi}}{2}\right)^t\right]_0^{+\infty} = \quad (339)$$

$$\frac{1}{\ln(e^{-j20\pi}) - \ln(2)}(-1) = \frac{1}{\ln(2) - j20\pi} = \frac{\ln(2) + j20\pi}{\ln(2)^2 + 400\pi^2}$$

$$H(-j20\pi) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{j20\pi t}dt = \frac{1}{\ln(2) + j20\pi} = \frac{\ln(2) - j20\pi}{\ln(2)^2 + 400\pi^2} = H(j20\pi)^* \quad (340)$$

Se observa que el valor de $H(-j20\pi)$ es el complejo conjugado del valor de $H(j20\pi)$, ya que la única diferencia entre ambos resultados es un cambio de signo en la parte imaginaria. Como sea, usamos MATLAB para comprobar los resultados obtenidos y, además, calcular así los valores numéricos aproximados de estas constantes:

```
>> syms t;
>> int((1/2)^t,t,0,+Inf) % Calculamos H(0)

ans =

1/log(2)
```



```
>> 1/log(2)

ans =

    1.4427

>> int((1/2)^t*exp(j*20*pi*t),t,0,+Inf) % Calculamos H(j20pi)

ans =

-1/(pi*20i - log(2))

>> abs(-1/(pi*20i - log(2)))

ans =

    0.0159

>> angle(-1/(pi*20i - log(2)))

ans =

    1.5598

>> int((1/2)^t*exp(-j*20*pi*t),t,0,+Inf) % Calculamos H(-j20pi)

ans =

1/(log(2) + pi*20i)

>> abs(1/(log(2) + pi*20i))

ans =

    0.0159

>> angle(1/(log(2) + pi*20i))

ans =

   -1.5598
```

Por tanto, vemos que:

$$H(0) = \frac{1}{\ln(2)} \cong 1.44 \quad (341)$$

$$H(j20\pi) = \frac{\ln(2) + j20\pi}{\ln(2)^2 + 400\pi^2} \cong 0.016e^{j1.56} \quad (342)$$

$$H(-j20\pi) = \frac{\ln(2) - j20\pi}{\ln(2)^2 + 400\pi^2} \cong 0.016e^{-j1.56} \quad (343)$$

Y así, finalmente, la expresión definitiva de la señal de salida de S la obtenemos sustituyendo estos valores en (337):

$$y(t) \cong 1.44 \frac{1}{2} + 0.016 \frac{1}{4} e^{j(20\pi t + 1.56)} + 0.016 \frac{1}{4} e^{-j(20\pi t + 1.56)} =$$

$$0.72 + 0.008 \cos(20\pi t + 1.56) \cong 0.712 + 0.016 \cos^2(10\pi t + 0.78) \quad (344)$$

4.2. Autofunciones de los sistemas LIT digitales

Sea S un sistema LIT digital cualquiera y sea $h[n]$ su respuesta impulsional. Considérese que la señal de entrada de S es una señal exponencial compleja de la forma siguiente:

$$x[n] = z_0^n \quad (345)$$

allí donde z_0 es una constante compleja ($z_0 \in \mathbb{C}$).

La señal de salida de S se obtiene como el resultado de la convolución entre $x[n]$ y $h[n]$:

$$\begin{aligned} y[n] &= x[n] * h[n] = h[n] * x[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h[m] z_0^{(n-m)} = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h[m] z_0^n z_0^{-m} = z_0^n \underbrace{\sum_{m=-\infty}^{+\infty} h[m] z_0^{-m}}_{H(z_0)} = H(z_0) z_0^n \end{aligned} \quad (346)$$

allí donde, independientemente de si $h[n]$ es una señal real o compleja, $H(z_0)$ es un valor constante (no depende de n) y, en general, complejo (puesto que $z_0 \in \mathbb{C}$).

Así pues, se observa que **la salida de un sistema LIT digital cualquiera ante cualquier señal exponencial compleja de la forma expresada en (345) es igual a esa misma exponencial compleja multiplicada por una constante**; en concreto, por la constante denominada $H(z_0)$ en (346), la cual depende únicamente de $h[n]$ (la respuesta impulsional del sistema) y de z_0 .

En este punto, enunciamos el **teorema de las autofunciones de los sistemas LIT digitales**:

Las señales exponencial compleja de la forma z_0^n ($z_0 \in \mathbb{C}$) son autofunciones de los sistemas LIT digitales, puesto que son procesadas por esta clase de sistemas de modo tal que en la salida siguen siendo ellas mismas multiplicadas por una constante:

$$y[n] = T_S\{x[n] = z_0^n\} = H(z_0) z_0^n \quad (347)$$

allí donde S es un sistema LIT digital, y donde **la constante $H(z_0)$ es el autovalor asociado a la autofunción z_0^n** , que se calcula como:

$$H(z_0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] z_0^{-n} \quad (348)$$

siendo $h[n]$ la respuesta impulsional de S .

En primer lugar, conviene notar que la constante z_0 tiene módulo y fase:

$$z_0 = r_0 e^{j\omega_0} \begin{cases} |z_0| = r_0 \\ \text{Arg}(z_0) = \omega_0 \end{cases} \quad (349)$$

Por tanto, vemos que las autofunciones de los sistemas LIT digitales pueden ser vistas como el resultado del producto de una señal exponencial real y una señal exponencial compleja:

$$z_0^n = (r_0 e^{j\omega_0})^n = r_0^n e^{j\omega_0 n} \quad (350)$$

allí donde r_0 y ω_0 son constantes reales ($r_0, \omega_0 \in \mathbb{R}$).

Y, en segundo lugar, ya que todo sistema LIT es, por definición, lineal e invariante en el tiempo, ya podemos extraer la consecuencia más inmediata, pero de enorme importancia, del teorema de las autofunciones. Sea una combinación lineal arbitraria de M exponenciales complejas:

$$x[n] = \sum_{k=1}^M c_k z_k^{(n+n_k)} = c_1 z_1^{(n+n_1)} + \dots + c_M z_M^{(n+n_M)} \quad (351)$$

allí donde $c_k, z_k \in \mathbb{C}, \forall k \in \{1, \dots, M\}; n_k \in \mathbb{Z}, \forall k \in \{1, \dots, M\};$ y $M \in \mathbb{Z}$, con $M \geq 1$.

La salida de cualquier sistema LIT digital S ante una entrada de la forma expresada en (351) es otra combinación lineal de las mismas exponenciales complejas:

$$y[n] = T_S\{x[n]\} = \sum_{k=1}^M H(z_k) c_k z_k^{(n+n_k)} \quad (352)$$

allí donde $H(z_k)$ se calcula a partir de $h[n]$, la respuesta impulsional de S , del siguiente modo:

$$H(z_k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] z_k^{-n} \quad (353)$$

Para finalizar, a continuación se propone otro ejercicio que ilustra la utilidad práctica del teorema de las autofunciones. En lugar de plantear una «versión digital» del Ejemplo 7 resuelto del apartado anterior, aquí vamos a ver cómo aplicar el teorema de las autofunciones a la hora de determinar las propiedades de sistemas «caja negra»:

Ejemplo 8

Sea el sistema digital S , cuya relación entrada-salida es desconocida. Se pide caracterizar este sistema, sabiendo que:

$$y_1[n] = T_S\{x_1[n] = 1\} = 1 \quad (354)$$

$$y_2[n] = T_S\{x_2[n] = (-1)^n\} = 0 \quad (355)$$

$$y_3[n] = T_S\left\{x_3[n] = \cos^2\left(\frac{\pi}{2}n\right)\right\} = \frac{1}{2} \quad (356)$$

$$y_4[n] = T_S\{x_4[n] = u[n]\} = \frac{1}{2}\delta[n] + u[n-1] \quad (357)$$

Solución

En primer lugar, la información de la que disponemos nos permite afirmar que, **muy probablemente, S es un sistema LIT** (es decir, que posee las propiedades de linealidad e

invariancia temporal), puesto que las ecuaciones (354)-(357) encajan con el comportamiento propio de cualquier sistema LIT y, además, no entran en contradicción entre sí. Veámoslo:

De entrada, (354) y (355) son consistentes con el teorema de las autofunciones (TA), puesto que las respectivas salidas de S ante dos exponenciales complejas distintas se corresponden con dichas exponenciales complejas multiplicadas por sendas constantes:

$$\left. \begin{aligned} x_1[n] &= 1 = e^{j0n} \\ y_1[n] &= T_S\{x_1[n]\} = 1 = e^{j0n} \end{aligned} \right\} \xRightarrow{TA} y_1[n] = H(0)e^{j0n} \Rightarrow H(0) = 1 \quad (358)$$

$$\left. \begin{aligned} x_2[n] &= (-1)^n = \cos(\pi n) = e^{j\pi n} \\ y_2[n] &= T_S\{x_2[n]\} = 0 = 0e^{j\pi n} \end{aligned} \right\} \xRightarrow{TA} y_2[n] = H(\pi)e^{j\pi n} \Rightarrow H(\pi) = 0 \quad (359)$$

Esto, por sí solo, no prueba en absoluto que S sea un sistema LIT, pero sí encaja con el comportamiento de un sistema LIT. De modo que, si se detectase un comportamiento inconsistente con el TA, entonces sí podríamos afirmar con certeza que no lo es.

Así, por (358) y (359) sabemos que, si S es un sistema LIT y $h[n]$ es su respuesta impulsional, entonces:

$$H(0) = 1 \Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j0n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] = 1 \quad (360)$$

$$H(\pi) = 0 \Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j\pi n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n](-1)^n = 0 \quad (361)$$

Si analizamos ahora (356), vemos que, aplicando de nuevo el TA, la salida de S concuerda con la hipótesis establecida en (360) y (361):

$$\left. \begin{aligned} x_3[n] &= \cos^2\left(\frac{\pi}{2}n\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(\pi n) = \frac{1}{2}e^{j0n} + \frac{1}{2}e^{j\pi n} \\ y_3[n] &= T_S\{x_3[n]\} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{j0n} + 0\frac{1}{2}e^{j\pi n} \end{aligned} \right\} \xRightarrow{TA} \begin{cases} H(0) = 1 \\ H(\pi) = 0 \end{cases} \quad (362)$$

Por tanto, la información aportada por las ecuaciones (354)-(356) es consistente con el TA y, debido a esto, permite apoyar la hipótesis de que S es un sistema LIT. Si en (362) hubiéramos concluido que o bien $H(0) \neq 1$, o bien $H(\pi) \neq 0$, sí podríamos afirmar con certeza que no lo es.

Por último, nos fijamos en (357) y vemos que no hace más que reafirmar con contundencia la hipótesis de que S es un sistema LIT, puesto que la información que se extrae de ella es muy rica y resulta ser totalmente consistente con todo lo anterior. Sucede que (357) nos indica la salida de S ante un escalón unitario ($y_4[n]$). Si se asume la hipótesis de que S es un sistema LIT, de $y_4[n]$ podemos deducir la respuesta impulsional de S ($h[n]$):

$$\begin{aligned} h[n] &= y_4[n] - y_4[n-1] = \frac{1}{2}\delta[n] + u[n-1] - \frac{1}{2}\delta[n-1] - u[n-2] = \\ &= \frac{1}{2}\delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1] \end{aligned} \quad (363)$$

Y, ahora, manteniendo la hipótesis de que S es un sistema LIT, podemos comprobar si un sistema LIT con esta respuesta impulsional presenta o no las señales de salida indicadas en (354)-(356). Para hacerlo, podríamos calcular la convolución entre la respuesta impulsional obtenida en (363)

y las señales de entrada de (354)-(356) y ver si los resultados cuadran con las señales de salida de (354)-(356). Sin embargo, podemos ahorrarnos esas tres convoluciones aplicando el TA y comprobando si esta $h[n]$ es consistente con (360) y (361). Lo hacemos y vemos que sí es el caso:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} \delta[n] + \frac{1}{2} \delta[n-1] \right) = \quad (364)$$

$$\frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n] + \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n-1] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n](-1)^n = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n](-1)^n + \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n-1](-1)^n = \quad (365)$$

$$\frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n] - \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n-1] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

Si el resultado de (364) no coincidiese con el de (360), o si el de (365) no coincidiese con el de (361), podríamos afirmar con certeza que S no es un sistema LIT. Sin embargo, sí coinciden.

Así pues, toda la información conocida del sistema S , es decir, la información aportada por las ecuaciones (354)-(357) es consistente con la hipótesis de que S sea un sistema LIT. Aun así, y a pesar de tratarse de una información muy rica, no podemos afirmar con certeza que S es un sistema LIT, puesto que, como ya sabemos, eso siempre es imposible en el caso de un sistema «caja negra». En todo caso, sí podemos afirmar que **el sistema LIT cuya respuesta impulsional es $h[n] = (1/2)\delta[n] + (1/2)\delta[n-1]$ es un firme candidato a ser el sistema S .**

Respecto del resto de propiedades de S , podemos decir lo siguiente:

- Las ecuaciones (354)-(357) son consistentes con que S sea **causal**, pues ninguna de las cuatro señales de salida conocidas del sistema tiene un instante inicial anterior al instante inicial de su correspondiente señal de entrada.
- Las ecuaciones (354)-(357) son consistentes con que S sea **estable**, pues las cuatro señales de salida conocidas del sistema están acotadas en amplitud.
- Las ecuaciones (354)-(357) son consistentes con que S tenga, **al menos, memoria finita**, pues, comparando la pareja $x_1[n]-y_1[n]$ con la pareja $x_4[n]-y_4[n]$, vemos que, si S fuese un sistema instantáneo, puesto que $y_1[n] = 1$, entonces debería ser el caso que $y_4[n] = u[n]$, pero eso no es así.
- Las ecuaciones (354)-(357) son consistentes con que S sea **invertible**, pues, ante cuatro señales de entrada distintas entre sí, el sistema presenta cuatro señales de salida distintas entre sí.

Dicho todo lo cual, **bajo la hipótesis de que S es un sistema LIT cuya respuesta impulsional es $h[n] = (1/2)\delta[n] + (1/2)\delta[n-1]$, sí podríamos afirmar con seguridad que S es un sistema causal, estable, con una memoria finita de una muestra, e invertible.**

4.3. Acerca del concepto de «transformada de una señal»

Si recuperamos las conclusiones de la analogía algebraica del apartado 2.4 de este mismo módulo, según las cuales un sistema LIT no es más que una matriz que transforma linealmente unas señales (vectores) en otras, podremos interpretar mucho mejor el significado del teorema de las autofunciones de los sistemas LIT.

Para ello, no hay más que recordar en qué consiste la **diagonalización de una matriz**. Una matriz diagonalizable es aquella matriz que puede ser descompuesta como el producto de tres matrices: su matriz de **autovectores** (o vectores propios) por su matriz de **autovalores** (o valores propios) por su matriz de autovectores transpuesta:

$$\bar{\bar{M}} = \bar{\bar{V}} \cdot \bar{\bar{D}} \cdot \bar{\bar{V}}^T \quad (366)$$

allí donde:

- $\bar{\bar{M}}$ es una matriz diagonalizable de n filas y m columnas (o sea, de $n \times m$).
- $\bar{\bar{V}}$ es una matriz ortonormal de $n \times n$, cuyas columnas son los autovectores de $\bar{\bar{M}}$.
- $\bar{\bar{D}}$ es una matriz diagonal de $n \times n$, tal que las componentes de su diagonal son los autovalores de $\bar{\bar{M}}$.
- $\bar{\bar{V}}^T$ es una matriz ortonormal de $n \times n$, cuyas filas son los autovectores de $\bar{\bar{M}}$.

Así, siendo \bar{v}_i la fila i -ésima de $\bar{\bar{V}}^T$ (o sea, el i -ésimo autovector de $\bar{\bar{M}}$) y d_i el elemento (i, i) de $\bar{\bar{D}}$ (o sea, el autovalor asociado a \bar{v}_i), se cumple que:

$$\bar{v}_i \cdot \bar{\bar{M}} = d_i \bar{v}_i \quad (367)$$

allí donde \bar{v}_i es un vector de \mathbb{R}^n ($\bar{v}_i = [v_{i1} \ v_{i2} \ \dots \ v_{in}]$) y donde d_i es un escalar. Es decir, que el producto de cualquier autovector de $\bar{\bar{M}}$ por $\bar{\bar{M}}$ da como resultado ese mismo autovector multiplicado por su autovalor asociado.

Como vemos, esto es exactamente lo mismo que el teorema de las autofunciones nos dice que sucede con los sistemas LIT y las señales exponencial compleja: **todo sistema LIT es una matriz diagonalizable tal que las señales exponencial compleja son sus autovectores y la constante por la cual el sistema multiplica a cada exponencial compleja en su salida es el autovalor asociado a dicha exponencial compleja**. La gracia del teorema de las autofunciones está en que demuestra que, por el mero hecho de ser lineal e invariante en el tiempo, cualquier sistema LIT presenta siempre este comportamiento ante cualquier señal exponencial compleja, independientemente de cuál sea el sistema LIT concreto y específico que se quiera considerar.

Entonces, de entre todas las consecuencias y aplicaciones de la diagonalización de matrices, la que sin duda es más relevante y tiene mayor interés desde el punto de vista de la teoría de señales y sistemas es la siguiente: debido a que $\bar{\bar{V}}^T$ y $\bar{\bar{V}}$ son matrices ortonormales de $n \times n$, **los autovectores de $\bar{\bar{M}}$ son una base generadora del espacio \mathbb{R}^n** (es decir, las filas de $\bar{\bar{V}}^T$, o las columnas de $\bar{\bar{V}}$, como se prefiera, forman base ortonormal de \mathbb{R}^n). Lo que esto implica es que **todo vector de \mathbb{R}^n puede expresarse como una combinación lineal de los autovectores de $\bar{\bar{M}}$** .

Es decir, denominando Y a la base generadora de \mathbb{R}^n constituida por los autovectores de \bar{M} ($Y = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n\}$) y siendo \bar{a} un vector cualquiera de \mathbb{R}^n ($\bar{a} = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n]$), se cumple que:

$$\bar{a} = \sum_{i=1}^n a_i^Y \bar{v}_i = a_1^Y \bar{v}_1 + a_2^Y \bar{v}_2 + \dots + a_n^Y \bar{v}_n \quad (368)$$

allí donde **los coeficientes a_i^Y son las componentes de \bar{a} en la base Y** ($\bar{a}_Y = [a_1^Y \ a_2^Y \ \dots \ a_n^Y]$), siendo cada uno de ellos el resultado del **producto escalar entre \bar{a} y \bar{v}_i** :

$$a_i^Y = \langle \bar{a}, \bar{v}_i \rangle = \sum_{j=1}^n a_j \bar{v}_{ij} = a_1 v_{i1} + a_2 v_{i2} + \dots + a_n v_{in} \quad (369)$$

Entre otras cosas, trabajar en base Y hace que calcular el producto $\bar{b}_Y = \bar{a}_Y \cdot \bar{M}$ sea una trivialidad y mucho más sencillo que calcular el producto $\bar{b} = \bar{a} \cdot \bar{M}$, puesto que, directamente:

$$\bar{b}_Y = \bar{a}_Y \cdot \bar{M} = [a_1^Y d_1 \ a_2^Y d_2 \ \dots \ a_n^Y d_n] \quad (370)$$

allí donde, recordemos, d_i es el i -ésimo autovalor de \bar{M} .

Por lo tanto, de este mismo modo, y ahora ya desde la perspectiva de la teoría de señales y sistemas, también **es muy interesante expresar cualquier señal como el resultado de una combinación lineal de exponenciales complejas**. De hecho, esta es la consecuencia del teorema de las autofunciones que ya hemos visto en los apartados 4.1 y 4.2, y con la que hemos jugado en el Ejemplo 7 y el Ejemplo 8, donde el cálculo de la señal de salida de un sistema LIT ante una señal de entrada resultante de una combinación lineal de exponenciales complejas no ha requerido más que multiplicar cada una de las exponenciales complejas presentes en la combinación por una constante: ecuaciones (331)-(333) para el caso analógico, y ecuaciones (351)-(353) para el caso digital.

Así pues, es debido a todo esto que, a partir de este punto, abandonaremos la caracterización de las señales y los sistemas en el dominio del tiempo y pasaremos a trabajar en «dominios transformados». Y, **¿en qué consiste trabajar en un «dominio transformado»?** Pues, simple y llanamente, en **hacer un cambio de base y dejar de trabajar con \bar{a} y \bar{b} para pasar a trabajar con \bar{a}_Y y \bar{b}_Y** .

Como ya vimos en el primer módulo, caracterizar las señales en el dominio del tiempo es trabajar con la base generadora constituida por las señales delta (que, además, es la base canónica, pues cada una de las señales delta, como sabemos, representa un único instante de tiempo). O sea, es engendrar cualquier señal como una combinación lineal de señales delta:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau \quad (371)$$

$$x[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m] \delta[n - m] \quad (372)$$

Es decir, trabajar en el dominio del tiempo, es trabajar con $x(t)$ y $x[n]$: es trabajar con \bar{a} y \bar{b} .

A partir de ahora, **vamos a abandonar la base generadora de las señales delta y vamos a trabajar con bases generadoras constituidas por señales exponencial compleja**. Es decir, literalmente, vamos a hacer un cambio de base como el que hemos hecho en (368)-(369) para dejar de trabajar con \bar{a} y pasar a trabajar con \bar{a}_Y , puesto que, como ya hemos visto en (370), trabajar en base Y nos facilita mucho las cosas.

Y, **¿en qué consiste este cambio de base?** Pues exactamente en lo mismo en que consiste en (368)-(369): en calcular **el producto escalar de $x(t)$ y $x[n]$ por cada una de las señales exponencial compleja que conforman la base**, obteniendo, así, las componentes de $x(t)$ y $x[n]$ en la nueva base de exponenciales complejas. Y es que, si nos fijamos, esto en realidad es lo que ya hemos hecho en las ecuaciones (333) y (353): calcular la constante por la que un sistema LIT S multiplica a una cierta exponencial compleja en su salida no es más que calcular el producto escalar de su respuesta impulsional por dicha exponencial compleja.

Que el signo negativo que aparece en los exponentes de las exponenciales complejas de (333) y (353) no nos confunda: el producto escalar entre vectores complejos se define a partir del complejo conjugado (es decir, de un cambio de signo en la fase) del segundo vector del producto. Ese es el significado algebraico de ese signo negativo. Por tanto:

- En (333), $H(s_k)$ es el resultado del producto escalar entre $h(t)$ y $e^{s_k t}$.
- En (353), $H(z_k)$ es el resultado del producto escalar entre $h[n]$ y z_k^n .

Así pues, lo que se calcula en las ecuaciones (333) y (353) son productos escalares y, de hecho, es justamente eso lo que vamos a hacer a partir de ahora siempre que calculemos «la transformada de una señal»:

La transformada de una señal (ya sea analógica o digital) es la señal resultante de representar la señal original mediante una nueva base generadora de señales.

Así, mientras que una señal representada en el dominio del tiempo no es más que los coeficientes mediante los que esa señal es engendrada como el resultado de una combinación lineal de señales delta, **la transformada de una señal está compuesta por los coeficientes mediante los que esa misma señal es engendrada como el resultado de una combinación lineal de otro tipo de señales** (en nuestro caso, señales exponencial compleja).

Por tanto, **una señal y su señal transformada son, en realidad, la misma señal, puesto que ambas contienen exactamente la misma información, solo que representada de distinto modo** (representada mediante una base distinta en cada caso).

Es en esto en lo que consiste implementar el cambio de base que supone abandonar el dominio del tiempo para pasar a un dominio transformado, es decir, en lo que consiste abandonar la representación temporal de una señal para pasar a trabajar con su transformada.

Por lo tanto, vamos a tomar las ecuaciones (333) y (353) y vamos a hacer dos cosas:

1. En lugar de limitar su aplicación a la respuesta impulsional de un sistema LIT, vamos a aplicárselas a cualquier señal ($x(t)$ o $x[n]$).
2. En lugar de calcularlas solo para una única exponencial compleja, vamos a calcularlas para toda la familia de las señales exponencial compleja; es decir, en lugar de calcularlas solo para una constante compleja (s_k o z_k), vamos a calcularlas para toda la variable compleja (s o z).

Si aplicamos esto en (333) y (353), obtenemos las siguientes expresiones:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st} dt \quad (373)$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n} \quad (374)$$

allí donde:

- Las variables s y z son variables complejas: $s, z \in \mathbb{C}$.
- $X(s)$ y $X(z)$ son señales complejas de variable compleja: $X(s_i), X(z_i) \in \mathbb{C}, \forall s_i, z_i \in \mathbb{C}$.
- La señal $X(s)$ es denominada «la transformada de Laplace de $x(t)$ ».
- El valor numérico $X(s_i)$ es el resultado del producto escalar entre $x(t)$ y $e^{s_i t}$. Por tanto, al expresar $x(t)$ como una combinación lineal de exponenciales complejas de la forma $e^{s_i t}$, $X(s_i)$ es el coeficiente que multiplica a $e^{s_i t}$ en dicha combinación lineal.
- La señal $X(z)$ es denominada «la transformada z de $x[n]$ ».
- El valor numérico $X(z_i)$ es el resultado del producto escalar entre $x[n]$ y z_i^n . Por tanto, al expresar $x[n]$ como una combinación lineal de exponenciales complejas de la forma z_i^n , $X(z_i)$ es el coeficiente que multiplica a z_i^n en dicha combinación lineal.

Y, básicamente, esta es la vía de entrada a la teoría que se desarrolla en los módulos posteriores, y es de este modo como hay que interpretar el concepto de «transformada de una señal» en todos ellos: tanto si se trata de estas dos transformadas que hemos presentado aquí, como si se trata de otras transformadas que se derivan de estas y que también estudiaremos, (a saber: las Transformadas de Fourier, de gran importancia en la teoría de señales y sistemas).

Así las cosas, y debido a las particularidades que presentan estas transformadas, a partir de este punto vamos a dejar de caracterizar conjuntamente las señales analógicas y las digitales:

- En primer lugar, vamos a centrarnos en las transformadas de las señales analógicas: empezaremos estudiando la Transformada de Laplace, para luego pasar a la Transformada de Fourier (lo que nos llevará a trabajar en el dominio de la frecuencia).
- Tras esto, estudiaremos las transformadas de las señales digitales: la Transformada z , la Transformada de Fourier de Señales Digitales, y la Transformada Discreta de Fourier (estas dos últimas ya nos permitirán trabajar en el dominio de la frecuencia discreta).
- Y, finalmente, estudiaremos en detalle los procesos de conversión analógica-digital y digital-analógica, así como el procesamiento digital de señales analógicas.

Resumen

En este módulo, hemos completado la caracterización temporal de los sistemas LIT y, en general, la caracterización temporal de las señales.

En primer lugar, hemos visto que todo sistema LIT procesa su señal de entrada aplicándole el cálculo de la operación convolución con su respuesta impulsional. Así, y tras estudiar las propiedades de la convolución, hemos aprendido a calcular esta operación por tramos, atendiendo siempre a la longitud de las señales implicadas: si son finitas, infinitas orientadas hacia un lado, o infinitas orientadas a ambos lados.

Pero, mucho más importante que eso, hemos visto también que todo sistema LIT puede ser completamente caracterizado mediante una única señal: su respuesta impulsional. Por ello, en segundo lugar, hemos estudiado en qué consiste dicha caracterización, viendo cómo determinar las propiedades de un sistema LIT a partir de su respuesta impulsional y también cómo caracterizar las asociaciones en serie, en paralelo y en lazo de realimentación de sistemas LIT. Finalmente, hemos finalizado esta segunda sección del módulo ampliando la analogía algebraica iniciada en el primer módulo y estableciendo que un sistema LIT no es más que una matriz.

En tercer lugar, hemos estudiado también las relaciones entrada-salida de una clase de sistemas LIT de gran importancia en la práctica. En concreto, los sistemas LIT analógicos regidos por ecuaciones de diferencias lineales de coeficientes constantes y los sistemas LIT digitales regidos por ecuaciones en diferencias lineales de coeficientes constantes. Hemos visto cómo la puesta en condiciones iniciales de estos sistemas determina su linealidad y, en última instancia, hemos dejado para módulos posteriores el estudio del procedimiento de cálculo de la respuesta impulsional de estos sistemas.

Y, finalmente, hemos estudiado el teorema de las autofunciones, que es una propiedad de gran importancia que cumple todo sistema LIT y que puede resumirse en lo siguiente: las señales exponencial compleja son autofunciones de los sistemas LIT. De entrada, este teorema puede ser utilizado para resolver más fácilmente cálculos que, de otro modo, se complicarían mucho al tener que calcular convoluciones que no tienen por qué ser triviales (especialmente, como hemos visto en el Ejemplo 7 y el Ejemplo 8, las que implican manejar señales infinitas orientadas a ambos lados, como lo son, por ser periódicas, las señales sinusoidales). Pero, interpretado más en profundidad, hemos visto también que el teorema de las autofunciones es lo que abre la puerta al paso decisivo de abandonar la caracterización temporal de las señales y los sistemas para pasar a caracterizarlos en otros dominios distintos al temporal. En general, esto ha desembocado en el concepto de transformada de una señal, que no es otra cosa que la implementación de un cambio de base consistente en dejar de representar las señales como combinaciones lineales de deltas y pasar a representarlas como combinaciones lineales de exponenciales complejas.

Ejercicios de autoevaluación

1. Sea un sistema LIT analógico S cuya salida ante un escalón unitario es $y_u(t) = A \sin(\omega_0 t)$. ¿Cuál es la respuesta impulsional de S ?
 - (a) $h(t) = A \sin(\omega_0 t)$.
 - (b) $h(t) = A \cos(\omega_0 t)$.
 - (c) $h(t) = A\omega_0 \cos(\omega_0 t)$.
 - (d) La información disponible no es suficiente para determinar $h(t)$.
2. Sea un sistema LIT digital S cuya salida ante un escalón unitario es $y_u[n] = \cos(\pi n)$. ¿Cuál es la respuesta impulsional de S ?
 - (a) $h[n] = 0$.
 - (b) $h[n] = -\pi \sin(\pi n)$.
 - (c) $h[n] = 2(-1)^n$.
 - (d) La información disponible no es suficiente para determinar $h[n]$.
3. ¿Cuál es la duración y cuáles son los instantes inicial y final de la señal resultante de la convolución $y(t) = \frac{3}{4} \Pi\left(\frac{t-3}{5}\right) * \frac{1}{2} \Pi\left(\frac{t+7}{4}\right)$?
 - (a) $y(t)$ es una señal finita de 10 segundos de duración, que se inicia en $t = -7$ y que finaliza en $t = 3$.
 - (b) $y(t)$ es una señal finita de 9 segundos de duración, que se inicia en $t = -4$ y que finaliza en $t = 5$.
 - (c) $y(t)$ es una señal finita de 5 segundos de duración, que se inicia en $t = 3$ y que finaliza en $t = 8$.
 - (d) $y(t)$ es una señal finita de 4 segundos de duración, que se inicia en $t = 3$ y que finaliza en $t = 7$.
4. ¿Cuál es la duración y cuáles son los instantes inicial y final de la señal resultante de la convolución $y[n] = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-3]\right) * \left(\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) u[-n+2]\right)$?
 - (a) $y[n]$ es una señal infinita orientada a la izquierda, que se inicia en $n \rightarrow -\infty$ y que finaliza en $n = -1$.
 - (b) $y[n]$ es una señal infinita orientada a la izquierda, que se inicia en $n \rightarrow -\infty$ y que finaliza en $n = 1$.
 - (c) $y[n]$ es una señal infinita orientada a ambos lados, que se inicia en $n \rightarrow -\infty$ y que finaliza en $n \rightarrow +\infty$.
 - (d) $y[n]$ es una señal finita de 5 muestras de duración, que se inicia en $n \rightarrow -3$ y que finaliza en $n = 2$.
5. ¿Cuál es el resultado de $4\delta(t-2) * \frac{3}{4} \Pi\left(\frac{t-1}{T}\right) * \frac{2}{T} \delta(t-1) * \frac{1}{2} \Pi\left(\frac{t+1}{T}\right) * \frac{1}{3} \delta(t+3)$?
 - (a) $\delta(t)$.
 - (b) $\Pi\left(\frac{t}{T}\right)$.

- (c) $\Lambda\left(\frac{t}{2T}\right)$.
(d) $u(t)$.

6. ¿Cuál es el resultado de $2^n \left(\left(\delta[n-3] * \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] * \frac{1}{2} u[n+3] \right) - u[n] \right)$?
- (a) $\frac{1}{2} \delta[n]$.
(b) $\frac{1}{2} u[n]$.
(c) $2\delta[n]$.
(d) $2u[n]$.
7. ¿Cuál es el resultado de la convolución $(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-1)^m \delta(t-m)) * (\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(t-m))$?
- (a) 0.
(b) $\delta[n]$.
(c) $\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(t-m)$.
(d) $\sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-1)^m \delta(t-m)$.
8. ¿Cuál es el resultado de la convolución $1 * a^{|n|}$, siendo $|a| < 1$?
- (a) 0.
(b) $\frac{1}{1-a} (au[-n-1] + u[n])$.
(c) $\frac{1}{1-a} (u[-n-1] + au[n])$.
(d) $a^{|n|}$.
9. Sea un sistema LIT cuya respuesta impulsional es $h(t) = \cos(100\pi t) (u(t) - u(t-1))$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?
- (a) Se trata de un sistema LIT causal, estable y de memoria finita.
(b) Se trata de un sistema LIT causal, inestable y de memoria infinita.
(c) Se trata de un sistema LIT no causal, inestable y de memoria finita.
(d) Se trata de un sistema LIT no causal, estable y de memoria infinita.
10. Sea un sistema LIT cuya respuesta impulsional es $h[n] = (-1)^n u[-n] + \delta[n-1]$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?
- (a) Se trata de un sistema LIT causal, estable y de memoria finita.
(b) Se trata de un sistema LIT causal, inestable y de memoria infinita.
(c) Se trata de un sistema LIT no causal, inestable y de memoria finita.
(d) Se trata de un sistema LIT no causal, estable y de memoria infinita.
11. Sea un sistema LIT cuya respuesta impulsional es $h[n] = \frac{1}{2} \delta[n] + \frac{1}{2} \delta[n-1]$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?
- (a) La respuesta impulsional de su sistema LIT inverso es $h[n] = 2\delta[n] - 2\delta[n-1]$.
(b) La respuesta impulsional de su sistema LIT inverso es $h[n] = 2\delta[n] - 2u[n-1]$.
(c) La respuesta impulsional de su sistema LIT inverso es $h[n] = 2 \cos(\pi n) u[n]$.
(d) Se trata de un sistema LIT no invertible.

12. Sea un sistema S del que se sabe únicamente que es LIT y del que se conocen la salidas $y_1(t) = T_S\{x_1(t) = 1\} = 0$ e $y_2(t) = T_S\{x_2(t) = \sin(10\pi t)\} = 2 \sin(10\pi t)$. ¿Cuál es la salida de S ante la señal de entrada $x_3(t) = \cos^2(5\pi t)$?

- (a) $y_3(t) = T_S\{x_3(t)\} = 0$.
- (b) $y_3(t) = T_S\{x_3(t)\} = 2 \cos^2(5\pi t)$.
- (c) $y_3(t) = T_S\{x_3(t)\} = 2 \cos(10\pi t)$.
- (d) $y_3(t) = T_S\{x_3(t)\} = \cos(10\pi t)$.

13. Sea un sistema LIT digital S cuya respuesta impulsional es $h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$. ¿Cuál es la salida de S ante la señal de entrada $x[n] = 1 + (-1)^n$?

- (a) $y[n] = T_S\{x[n]\} = 0$.
- (b) $y[n] = T_S\{x[n]\} = \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right)^n$.
- (c) $y[n] = T_S\{x[n]\} = 2 \left(1 + \frac{1}{3}(-1)^n\right)$.
- (d) $y[n] = T_S\{x[n]\} = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]$.

Soluciones a los ejercicios de autoevaluación

1. La respuesta correcta es la **(c)**.
2. La respuesta correcta es la **(c)**.
3. La respuesta correcta es la **(b)**.
4. La respuesta correcta es la **(a)**.
5. La respuesta correcta es la **(c)**.
6. La respuesta correcta es la **(b)**.
7. La respuesta correcta es la **(a)**.
8. La respuesta correcta es la **(b)**.
9. La respuesta correcta es la **(a)**.
10. La respuesta correcta es la **(c)**.
11. La respuesta correcta es la **(c)**.
12. La respuesta correcta es la **(d)**.
13. La respuesta correcta es la **(c)**.

Bibliografía

Oppenheim, A. V., Schafer, R. W., & Buck, J. R. (1999). *Discrete-Time Signal Processing* (2nd ed.). Prentice Hall, Signal Processing Series (Capítulo 1).

Oppenheim, A. V., Willsky, A. S., & Nawab, S. H. (1996). *Signals & Systems* (2nd ed.). Prentice Hall, Signal Processing Series (Capítulo 2).

Palm III, W. J. (2010). *Introduction to MATLAB for Engineers* (3rd ed.). McGraw-Hill.

Proakis, J. G., & Manolakis, D. G. (2007). *Digital Signal Processing* (4th ed.). Prentice Hall (Capítulo 2).